Accessions

Shelf No.
E.5174.8

BOSTONIA CONDITA, AD. 1830.
SICUT PATRIBUS SIT DEUS NOBIS, QUAM SIBI SIC ILLIS REGIMINE DONATA AD·DCC·LXXII

NATH. BOWDITCH, OB. MDCCCXXXVIII

BOSTON PUBLIC LIBRARY

FROM THE

Bowditch Fund.

Recd

The Heliotype Co.

BOUND BY RIVIERE & SON.

allie

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
Boston Public Library

https://archive.org/details/philosophiaenatu00newt_0

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

CLAS BOZON

ASSISTANT

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

a Sereniſſimo

REGE CAROLO II.

AD

PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET AUSPICIIS

POTENTISSIMI MONARCHÆ

JACOBI II.

Bow
May 24. 1927
7

PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

CUm *Veteres* Mechanicam *(uti Author eſt* Pappus*) in rerum Naturalium inveſtigatione maximi fecerint, & recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggreſſi ſint : Viſum eſt in hoc Tractatu* Matheſin *excolere quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres conſtituerunt:* Rationalem *quæ per Demonſtrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad practicam ſpectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq;* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem Artifices parum accurate operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt Artis ſed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior eſt Mechanicus, ſi quis accuratiſſime operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum deſcriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet ſed poſtulat. Poſtulat enim ut Tyro eaſdem accurate deſcribere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet. Rectas & circulos deſcribere Problemata ſunt ſed non Geometrica. Ex* Mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud eſt quam* Mechanicæ univerſalis *pars illa quæ artem menſurandi accurate proponit ac demonſtrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue verſentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuſcunq; reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunq; requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deq; potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elaſticam, reſiſten-*

tiam

tiam Fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter hæc noſtra tanquam Philoſophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a Phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant Propoſitiones generales quas Libro primo & ſecundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per Propoſitiones in Libris prioribus Mathematice demonſtratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philoſophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum* Typothetarum Sphalmata *correxit & Schemata incidi curavit, ſed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me figuram Orbium cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit ut eadem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam Motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cæpiſſem quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum pluriuminter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant, (imperfecta cum ſint,) in Corollariis Propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

IN

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

D. ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentisque nostræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ Vis circumrotat Orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Astri.
Discimus hinc tandem qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam

Deserit

Deſerit, ac Nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque *S*cholas fruſtra rauco certamine vexant
Obvia conſpicimus nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Queis Superum penetrare domos atque ardua Cœli
Scandere ſublimis Genii conceſſit acumen.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cœligenæ vires dignoſcite Mentis
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit Tabulis compeſcere Cædes
Furta & Adulteria,& perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
Reſpiciens miſeræ ſolummodo commoda vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Clauſtra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſæcula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cœleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AEr duplo denſior in duplo ſpatio quadruplus eſt. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunq; diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſq; pondus. Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

Def. II.

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis, adeoq; in corpore duplo majore æquali cum Velocitate duplus est, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodq;, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neq; differt quicquam ab inertia Massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta, estq; exercitium ejus sub diverso respectu et Resistentia et Impetus: Resistentia quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; Impetus quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus Resistentiam quiescentibus et Impetum moventibus tribuit; sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab

vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, expressione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunq; tendit.

Hujus generis est gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terræ: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcunq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Est autem vis centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis ejusdem major in minori Distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in Vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium (ut experimento pendulorum constat) atq; adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a Terra; in æqualibus autem distantiis eadem undiq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inq; cor-

 pore

pore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc vis eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum & (ut ita dicam) pondus, & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, qua deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires abſolutas, acceleratrices & motrices, & diſtinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium: Nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum & propenſionem totius in centrum, ex propenſionibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad centrum, tanquam cauſa aliqua prædituм, ſine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis Magneticæ vel Terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus ſaltem eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones et impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſus vel propenſionis cujuſcunq; in centrum, indifferenter et pro ſe mutuo promiſcue uſurpo, has vires non phyſice ſed Mathematice tantum conſiderando

rando. Unde caveat lector ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere et phyſice tribuere, ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo in ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſunt, explicare viſum eſt. Nam tempus, ſpatium, locum et motum ut omnibus notiſſima non definio. Dicam tamen quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipit. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares diſtingui.

I. Tempus abſolutum verum & Mathematicum, in ſe & natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio; relativum apparens & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura, (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium abſolutum natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis ſemper manet ſimilare & immobile; relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cæleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine, ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur, ſpatium Aeris noſtri quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus, & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtq; pro ratione

tione ſpatii vel abſolutus vel relativus. Partem dico ſpatii, non ſitum corporis vel ſuperficiem ambientem. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; ſitus vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ipſius loco eadem cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis, adeoq; locus totius idem cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navis regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum Navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua Navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra vere quieſcit, corpus quod relative quieſcit in Navi, movebitur vere et abſolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et abſolutus corporis motus partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex Navis motu relativo in Terra: et ſi corpus etiam movetur relative in Navi, orietur verus ejus motus partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum Navis in Terra, tum corporis in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut ſi Terræ pars illa ubi Navis verſatur moveatur vere in Orientem, cum Volocitate partium 10010, et velis ventoq; feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem verſus cum Velocitatis parte una, movebitur Nauta vere et abſolute in ſpatio immoto cum Velocitatis partibus 10001 in Orientem, et relative in Terra Occidentem verſus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus

Tempus abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per Æquationem Temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro Menſura Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi ut ex veriore Tempore menſurent motus cæleſtes. Poſſibile eſt ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus Temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli; proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex ijſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii oſcillatorii, tum etiam per Eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam Tempora & Spatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum Eſſentia eſt ut ſint loca, & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta loca, & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti motus.

Verum quoniam hæ ſpatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui, earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa; deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſq; referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, cauſas & effectus. Quietis proprietas

eſt

eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoq; cum poſſibile ſit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam poſitionem ſervet, quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Igitur motis corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quieſcunt. Et propterea motus verus et abſolutus definiri nequit per tranſlationem e vicinia corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam vere quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et ſublata illa tranſlatione non vere quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur; ſunt enim ambientia ad incluſa ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, abſq; tranſlatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto loco movetur una locatum, adeoq; corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum et abſolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, et motu loci hujus de loco ſuo, et ſic deinceps, uſq; dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri et abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt, et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli: Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant

vant poſitiones ad invicem, atq; adeo ſemper manent immota, ſpatiumq; conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri et relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas : at motus relativus generari et mutari poteſt abſq; viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut ijs cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſus motus verus a viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur, at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, et conſervari ubi verus mutatur ; et propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti et relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem et abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, et filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu : ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis, at poſtquam, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit vas, ut hæc quoq; ſenſibiliter revolvi incipiat, recedet ipſa paulatim e medio, aſcendetq; ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) et incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuiq; relativo hic

omnino contrarius. Initio ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Poſtea vero ut aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe, atq; hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſq; revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens; motus autem relativi pro varijs relationibus ad externa innumeri ſunt, & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cælos noſtros infra Cælos fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; Planetæ & ſingulæ Cælorum partes, qui relative quidem in Cælis ſuis proximis quieſcunt, moventur vere. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in vere quieſcentibus) unaq; cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non ſunt eæ ipſæ quantitates quarum nomina præ ſe ferunt, ſed earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatij, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ menſuræ; & ſermo erit inſolens & pure Mathematicus ſi quantitates menſuratæ hic ſubintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris literis qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neq; minus contaminant Matheſin & Philoſophiam qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt; propterea quod partes ſpatij illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam ſuppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex aucta vel diminuta fili tenſione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur, id eſt facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile, quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt ſtellæ fixæ in regionibus noſtris: ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum & inveniretur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus & apparentibus differentijs colligere, & contra, ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus, eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui.

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

Lex. III.

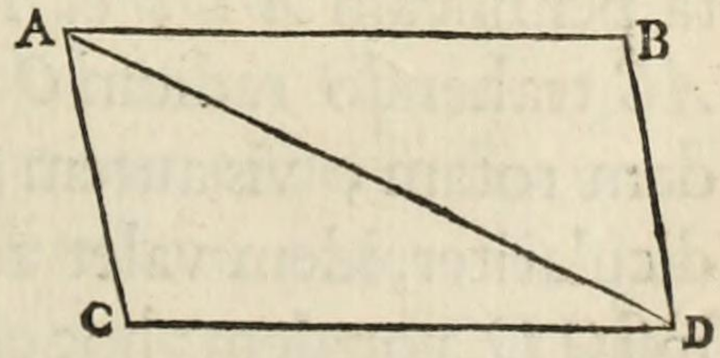
Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem : sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumq; impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunq: mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis :) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi sola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* sive vis *N* imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

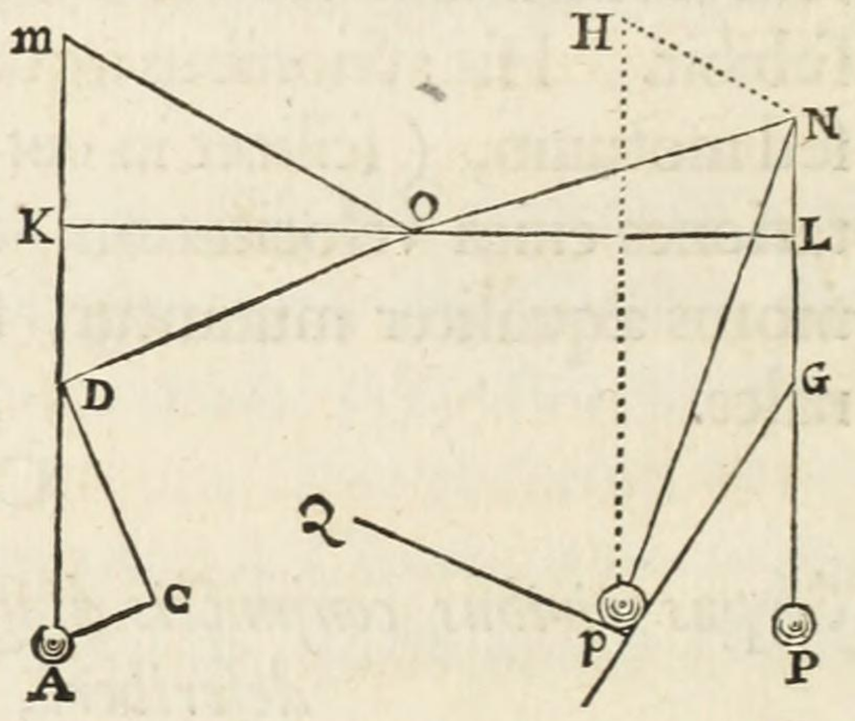


illa *B D*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſq; lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt.

Corol. II.

Et hinc patet compoſitio vis directæ A D ex viribus quibuſvis obliquis A B & B D, & viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ A D in obliquas quaſcunq; A B & B D. Quæ quidem Compoſitio & reſolutio abunde confirmatur ex Mechanica.

Ut ſi de rotæ alicujus centro O exeuntes radij inæquales *O M, O N* filis *M A, N P* ſuſtineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroq; O & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* deſcribatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela ſit *A C* & perpendicularis *D C*. Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa ſint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc reſolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *D C*, trahendo radium *D O* perpendiculariter, idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium *O L* ipſi *O D* æqualem; hoc eſt idem atq; pondus *P*, quod ſit ad pondus *A* ut vis *D C* ad vim *D A*, id eſt (ob ſimilia triangula *A D C*, *D O K*,) ut *D O* (ſeu *O L*) ad *O K*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *O K* & *O L*, idem pollebunt & ſic conſiſtent in æquilibrio: (quæ eſt proprietas notiſſima Libræ,



Vectis

Vectis & Axis in Peritrochio:) ſin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *N p*, partim incumbat plano obliquo *p G*: agantur *p H*, *N H*, prior horizonti, poſterior plano *p G* perpendicularis; & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *p H*, reſolvi poteſt hæc in vires *p N*, *H N*. Si filo *p N* perpendiculare eſſet planum aliquod *p Q* ſecans planum alterum *p G* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *p Q*, *p G* ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *p N*, *H N* perpendiculariter, nimirum planum *p Q* vi *p N* & planum *p G* vi *H N*. Ideoque ſi tollatur planum *p Q* ut pondus tendat filum, quoniam filum ſuſtinendo pondus, jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi *pN*, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *P N*, ut *p N* ad *p H*. Ideoq; ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *A M*, *p N* a centro rotæ, & ratione directa *p H* ad *p N*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atq; adeo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p* planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *p Q* ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam *p H* in plano, ut *p N* ad *p H*; atq; ad vim qua urget planum alterum *p G* ut *pN* ad *N H*. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur Corollarij hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Authoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, radijs volubilibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſq; potentijs Mechanicis

nicis componi ſolent, ut & vires Nervorum ad animalium oſſa movenda.

Corol. III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eiq; contraria reactio æquales ſunt per Legem 3, adeoq; per legem 2, æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æqualis erit ſubductio de motu utriuſq;, adeoq; differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatq; duas velocitatis partes, et *B* ſequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoq; motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B* ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinq; corpus *B* amittet partes totidem, adeoq; perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinq; exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoq; progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una parte, amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel regredietur cum una parte amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atq; ita ſummæ motuum conſpirantium 15+1 vel 16+0, differentiæ contrariorum

17–1 & 18–2 ſemper erunt partium ſexdecim ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſq; velocitas ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem ut motus poſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem, cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus; dein corporis utriuſq; motus (per Corol. 2.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atq; antea, & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

Corol. IIII.

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis, & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum divi-

dens vel quieſcet vel progredietur uniformiter in linea ~~a~~recta. Hoc poſtea in Lemmate xxiii demonſtratur in plano, & eadem ratione demonſtrari poteſt in loco ſolido. Ergo ſi corpora quotcunq; moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis, vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data: ſimiliter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem, alijsq; omnibus in ſe extrinſecus impreſſis, omnino vacant, adeoq; moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cum diſtantiæ centrorum utriuſq; a communi gravitatis centro ſint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atq; adeo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur, a communi corporum omnium centro, in partes ſummis totalibus corporum, quo-

rum

rum ſunt centra, reciproce proportionales, adeoq; centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum; manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter ſe, nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ, & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel Quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum, niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. *Eſt* igitur ſyſtematis corporum plurium **Lex eadem** quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam **in ſtatu motus** vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum **ex motu centri gravitatis** æſtimari ſemper debet.

Corol. V.

Corporum dato ſpatio incluſorum ijdem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſq; motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroq; caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe **mutuo** feriunt. Ergo per Legem 2 æquales erunt congreſſuum effectus in utroq; caſu, & propterea manebunt motus inter ſe in **uno caſu** æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

Corol. VI.

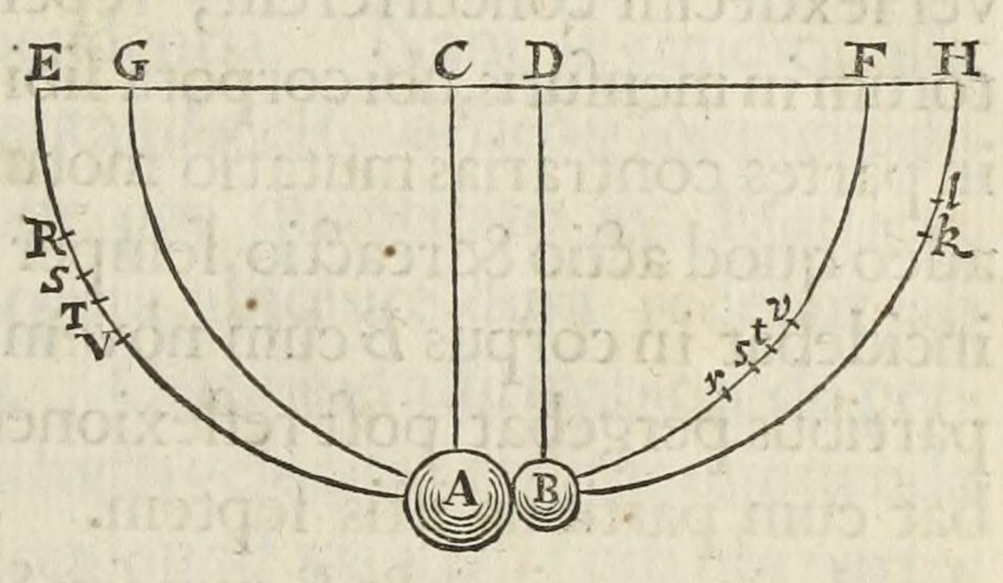
Si corpora moveantur quomodocunq; inter ſe & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur ; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe ac ſi viribus illis non eſſent incitatà.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 2.) adeoq; nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

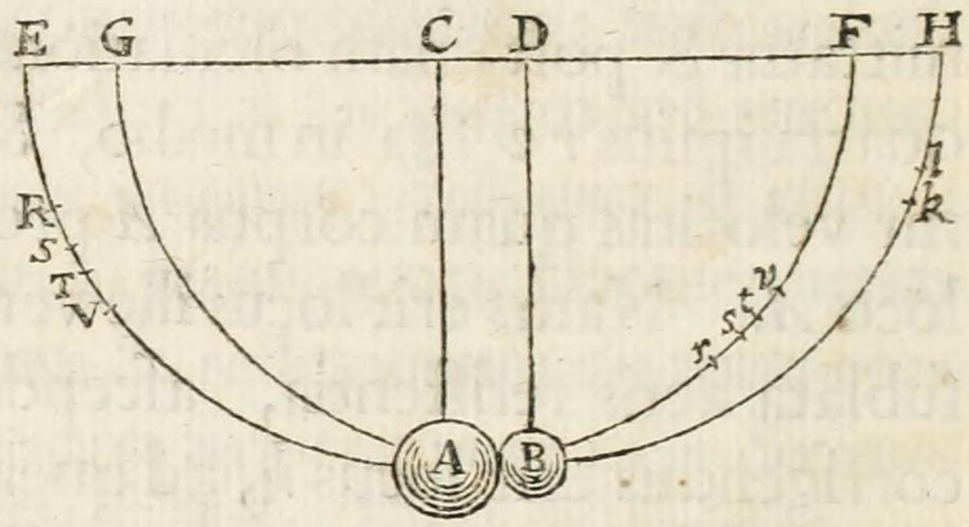
Scholium

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & Corollaria duo prima adinvenit *Galilæus* deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in Parabola, conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Ab ijſdem Legibus & Corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium Pendulorum, ſuffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his ijsdem & Lege tertia *D. Chriſtopherus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *D. Chriſtianus Hugenius* , hujus ætatis Geometrarum facile Principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim adinvenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes; Et primus quidem *D. Walliſius*, dein *D. Wrennus* & *D. Hugenius* inventum prodidit. Sed & veritas comprobata eſt a *D. Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum, quod etiam *Clariſſimus Mariottus* Libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum ut hoc experimentum cum Theorijs ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio tum reſiſtentiæ aeris, tum etiam vis Elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora A, B filis parallelis $A\,C$, $B\,D$ a centris C, D. His centris & intervallis

vallis describantur semicirculi *E A F*, *G B H* radijs *C A*, *D B* bisecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *E A F* punctum quodvis *R*, & (subducto corpore *B*) demittatur inde, redeatq; post unam oscillationem ad punctum *V*. Est *R V* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *R V* fiat *S T* pars quarta sita in medio, & hæc exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, absq; errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chorda arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*, a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *s t* pars quarta ipsius *r v* sita in medio, & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *T A* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem, deinde in chordam arcus *t A* ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus B *l*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusq; tam ante, quam post reflexionem ; & tum de-



demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idq; in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo, duodecim vel ſexdecim concurrerent, reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant, quod in partes contrarias mutatio motus erat corpori utriq; illata, atq; adeo quod actio & reactio ſemper erant æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus, corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex & redibat *A* cum duabus, redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim & reſtabit nihil; ſubducantur aliæ partes duæ & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fiunt partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandam plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim & *B* tardius cum partibus quinq; & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinq; partibus, pergebat B cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in B. Et ſic in reliquis.



A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Namq; errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A* B, tum loca *s*, *k* notare ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro

Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi conditio illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenij* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatq; corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore. In vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atq; hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeq; non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietq; ſyſtema corporum duo-

rum

rum & obſtaculi moveri in directum in partes verſus *B*, motuq; in ſpatiis liberis ſemper accelerato abire in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per *L*egem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeq; corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent, neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinq; ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra, ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent quæ ſunt ut aſcenſus & deſcenſus quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ fit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas Manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam Cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus cu-

neus

neus urget partes duas ligni fissi est ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita formentur ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires, Agens resistentiam sustinebit, & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus Machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere quam late pateat, quamq; certa sit Lex tertia motus. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & Resistentis reactio ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM

Liber PRIMUS

SECT I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

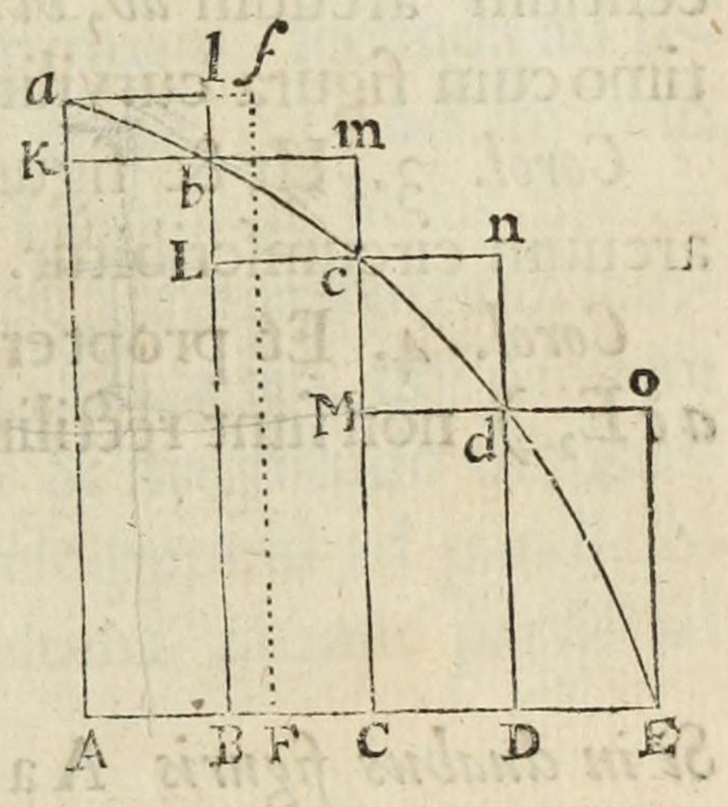
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore conſtanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere poſſunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales.

Si negas, ſit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypotheſin.

Lem-

Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c, *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum $Kl + Lm + Mn + Do$, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summa Aa, id est rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam æqualitatis, ubi parallelogramorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscripræ, at latitudine sua AF

in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

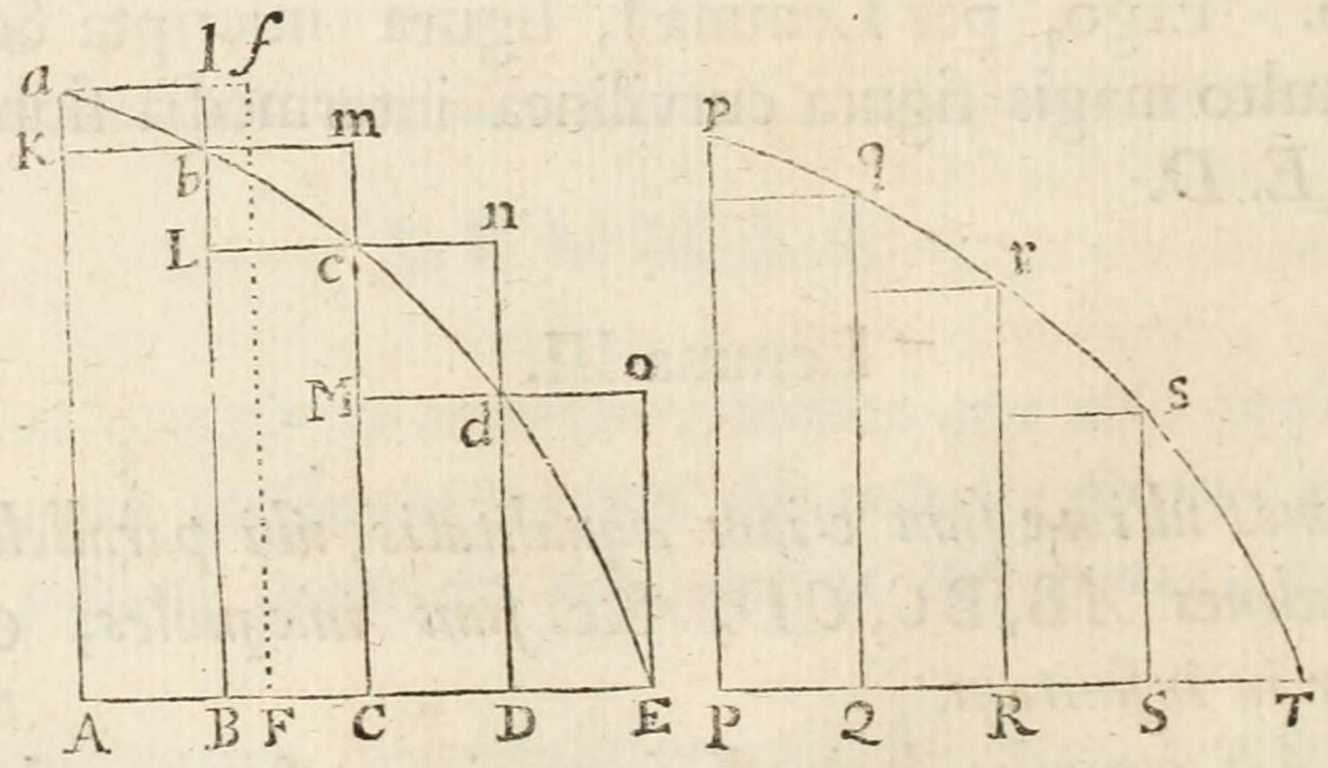
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumſcribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *a c E*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad

ad figuram; exiſtente nimirum figura priore (per Lemma 111.) ad ſummam priorem, & poſteriore figura ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis.

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunq; generis quantitates in eundem partium numerum utcunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam cæteræq; ſuo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam ſi in Lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

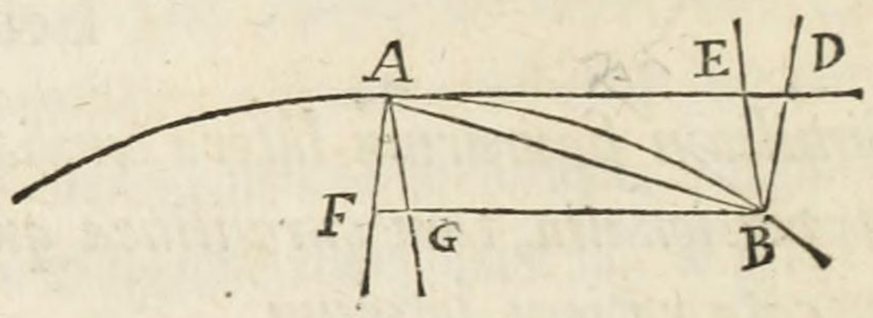
vel coincidet cum tangente A *d*, vel ducetur inter tangentem & curvam. Sed casus posterior est contra naturam Curvaturæ, ergo prior obtinet. *Q. E. D.*

Lemma. VII.

Iisdem positis, dico quod ultima ratio arcus, chordæ & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis. Vide Fig. *Lem.* 6 & 8 *vi.*

Nam producantur A *B* & A *D* ad *b* & *d* & secanti B D parallela agatur *b d*. Sitq; arcus A *b* similis arcui A B. Et punctis A, *B* coeuntibus, angulus *d* A *b*, per Lemma superius, evanescet; adeoq; rectæ A *b*, A *d* & arcus intermedius A *b* coincident,& propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ A B, A D, & arcus intermedius A B rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela *B F* rectam quamvis A *F* per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc ultimo ad arcum evanescentem A B rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo A F B-D, rationem semper habet æqualitatis ad A D.



Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ B E, *B D*, A F, A *G*, secantes tangentem A D & ipsius parallelam *B F*, ratio ultima abscissarum omnium A D, A E, *B F*, *B G*, chordæq; & arcus A *B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

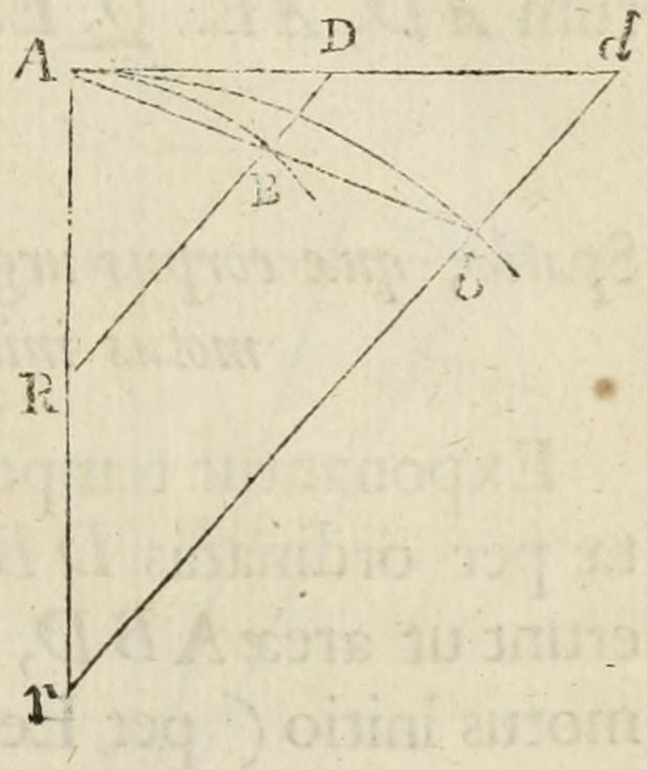
Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma VIII.

Si rectæ datæ A R, B R cum arcu A B, chorda A B & tangente A D, triangula tria A R B, A R B, A R D constituunt, dein puncta A, B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.

Nam

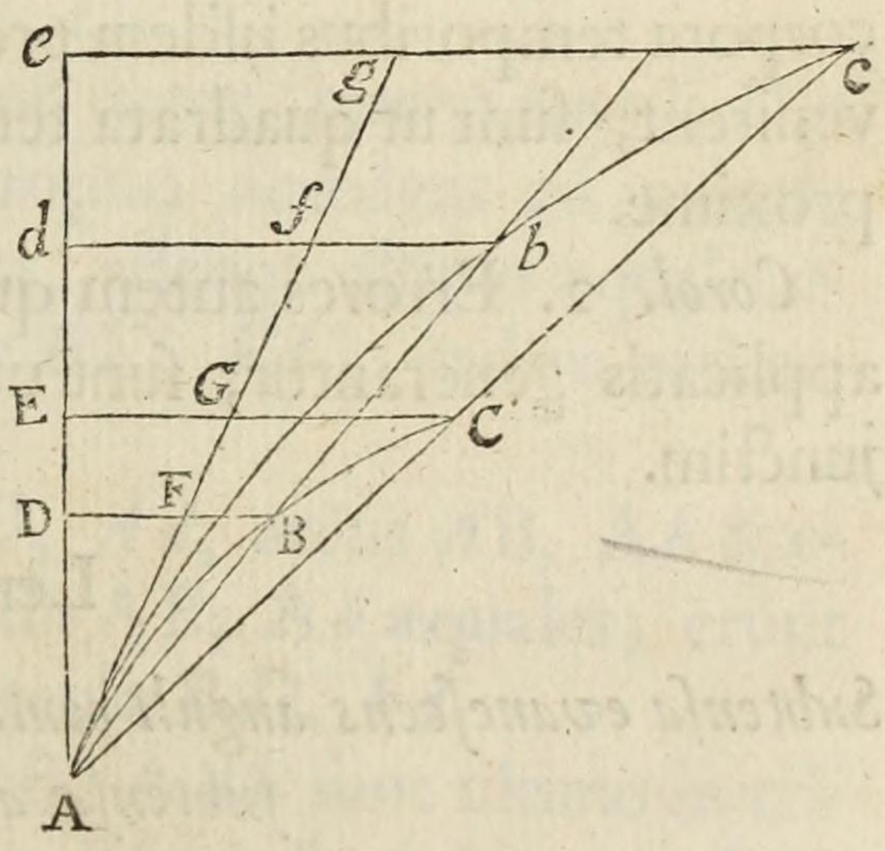
Nam producantur AB, A*D*, A*R* ad *b*, *d* & *r*. Ipſi *RD* agatur parallela *r b d*, & arcui AB ſimilis ducatur arcus A*b*. Coeuntibus punctis A, B, angulus *b* A *d* evaneſcet, & propterea triangula tria *r Ab*, *r Ab*, *r Ad* coincident, ſuntq; eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*



Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

Lemma IX.

Si recta AE & Curva AC poſitione datæ ſe mutuo ſecent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, EC, curvæ occurrentes in B, C; dein puncta B, C accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum ADB, AEC erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.



Etenim in *AD* producta capiantur *Ad*, *Ae* ipſis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ & proportionales. Producatur *AC* ad *c*, ducatur curva A*bc* ipſi A*BC* ſimilis, & recta A*g* tangatur curva utraq; in A; & ſecantur ordinatim applicatæ in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum coeant puncta *B*, *C* cum puncto A, & angulo *c* A*g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*, adeoq; per Lemma V, erunt in duplicata

plicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* ſunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Lemma X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi regulari deſcribit, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, A*E*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*, & ſpatia his velocitatibus deſcripta erunt ut areæ A*BD*, A*CE* his ordinatis deſcriptæ, hoc eſt ipſo motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum A*D*, A*E*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium errores, qui viribus æqualibus in partibus iſtis ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus ijſdem proportionalibus abſq; viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

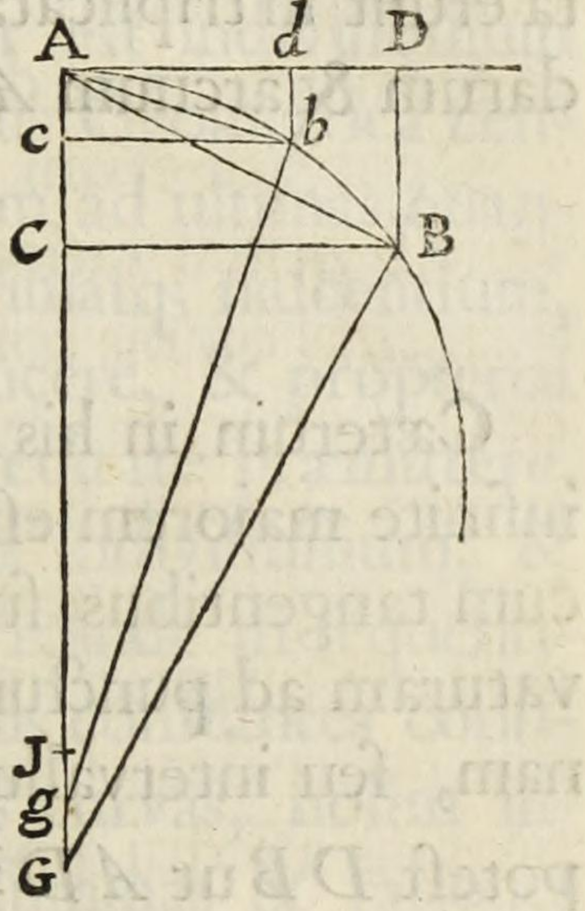
Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Lemma XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille A B, tangens ejus A*D*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, ſubtenſa arcus A B. Huic ſubtenſæ A B & tangenti A D perpendiculares erigantur A*G*, B G, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitq; *J* interſectio linearum B G, A G ultimo facta ubi puncta D, B accedunt uſq; ad A. Manifeſtum eſt quod diſtantia

tia GJ minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$ & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoq; ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam JG assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* æqualis rationi ultimæ BD ad bd. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoq; eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, tamen anguli D,d ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ BD, bd in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab & eorum sinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD, bd.

Corol. 2. Triangula rectilinea ADB, Adb sunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inq; sesquiplicata laterum DB, db: Utpote in composita ratione laterum AD & DB, Ad & db existentia. Sic & triangula ABC, Abc sunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc.

Corol. 3. Et quoniam DB, db sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum AD, Ad; erunt areæ ultimæ curvilineæ

ADB, Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, Adb, & segmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD, Ad; tum chordarum & arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem ; hoc est curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum AJ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3: quo in casu circulus nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci potest, proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat DB successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & con-

contenta. Præmiſi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi perplexas demonſtrationes, more veterum Geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium Hypotheſis; & propterea Methodus illa minus Geometrica cenſetur, malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſq; naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium, & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas, nolim indiviſibilia ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi, vimq; talium demonſtrationum ad methodum præcedentium Lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attigit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neq; poſtea, ſed tunc cum attingit, id eſt illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium intelligendam eſſe rationem quantitatum non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri & minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi.

Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumq; hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant, & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero tranſgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. Igitur in ſequentibus, ſiquando facili rerum imaginationi conſulens, dixero quantitates quam minimas, vel evaneſcentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

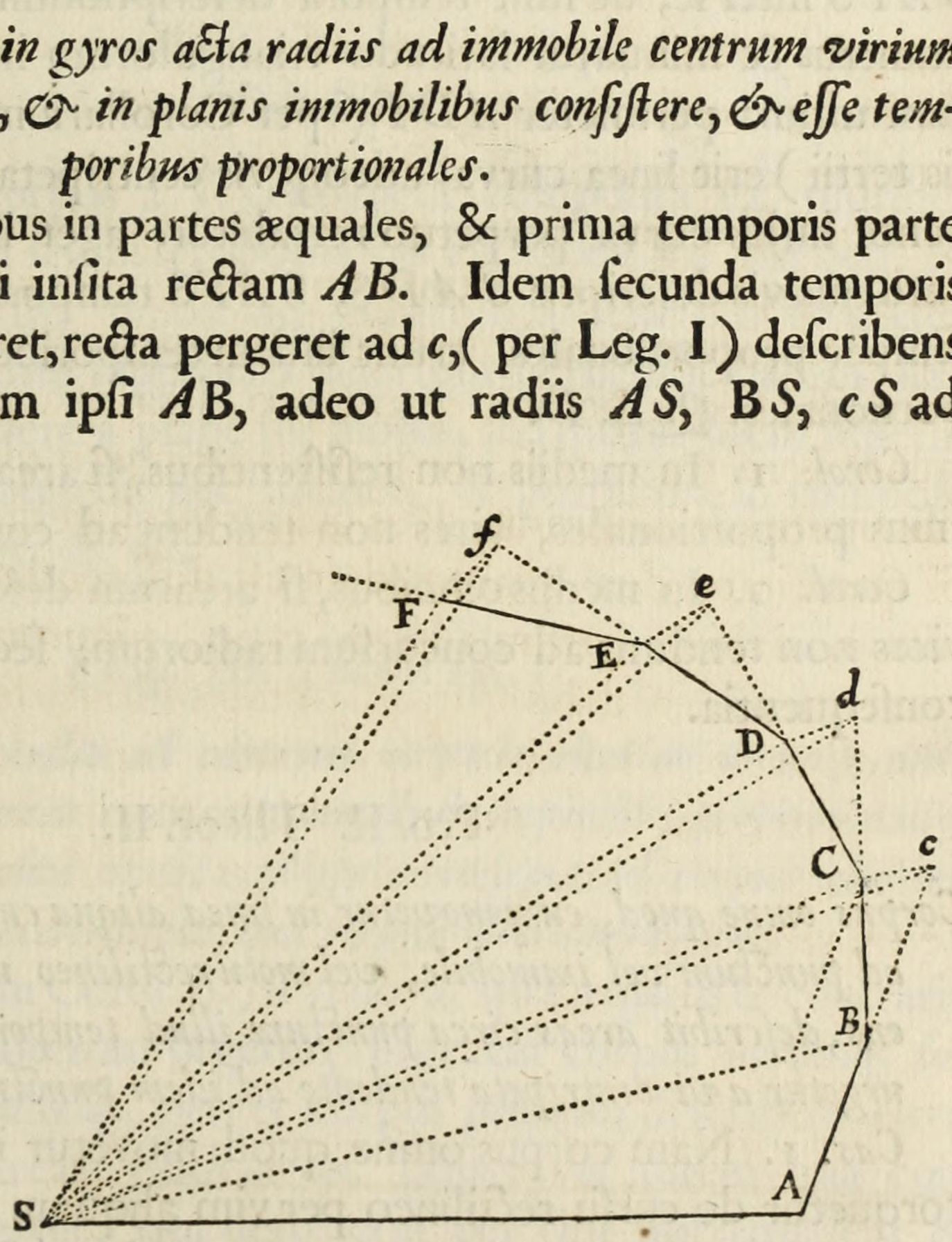
SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, B*Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta B*c* deflectere & pergere in recta B*C*. Ipsi B*S* parallela agatur *cC* occurrens B*C* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis



vis centripeta ſucceſſive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas *CD*, *DE* *EF*, &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum *SCD* triangulo *SBC* & *SDE* ipſi *SCD* & *SEF* ipſi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis *SADS*, *SAFS* inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur laticudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter *ADF*, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, vires non tendunt ad concurſum radiorum, ſed inde declinant in conſequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de curſu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD* &c. circa punctum immobile S, temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *cC* (per Prop. 40 Lib. I Elem. & Leg. II;) hoc eſt ſecundum lineam

B S, & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *d D* parallelam, hoc eſt ſecundum lineam *C S*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus In hoc caſu ſenſus Propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua agat ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano ſui motus, ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunq; moti ducto, deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; ſecundum lineas parallelas, perget corpus primum deſcribere circa corpus alterum areas eaſdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum deſcribere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Co-

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum radio ad alterum ducto deſcribit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium ſecundum, compoſita,) qua corpus prius urgetur, ſubducatur (per idem *Le*gum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur ; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto deſcribit areas quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Viſq; tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita, ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur, circum quod æquabilis eſt arearum deſcriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

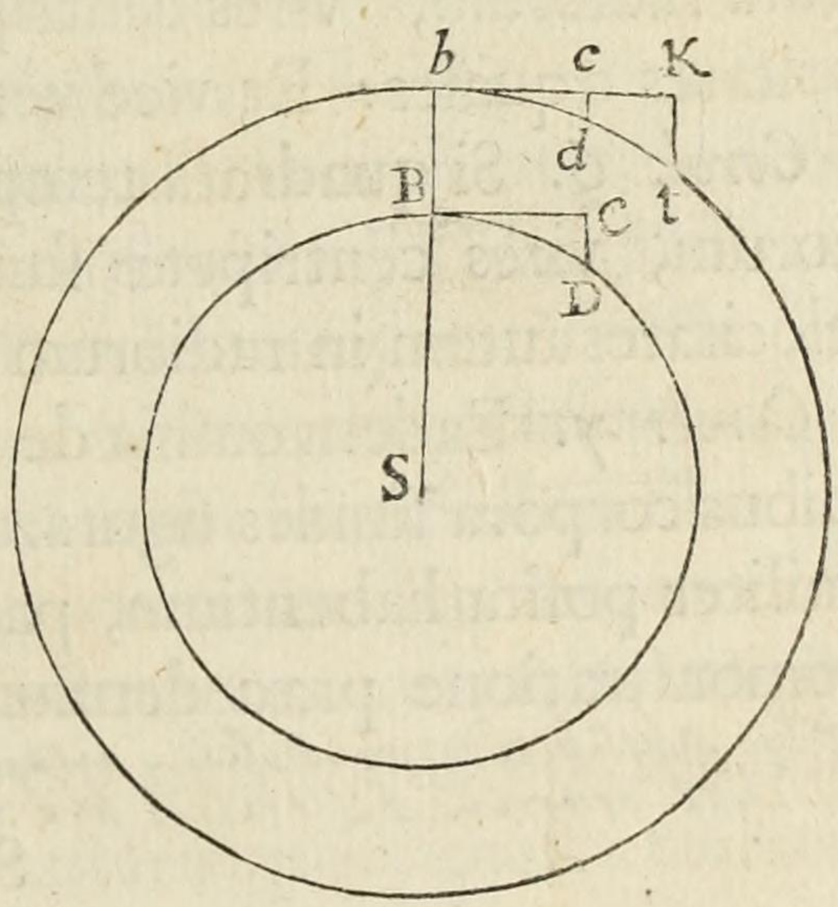
Quoniam æquabilis arearum deſcriptio Index eſt centri quod vis illa reſpicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita ſua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

Prop.

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & eſſe inter ſe ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *B D*, *b d* gyrantia, ſimul deſcribant arcus *B D*, *b d*. Quoniam ſola vi inſita deſcriberent tangentes *B C*, *b c* his arcubus æquales, manifeſtum eſt quod vires centripetæ ſunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ ſunt ad invicem in ratione prima ſpatiorum naſcentium *C D*, *c d*: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis deſcriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura *t k b* figuræ *D C B* ſimilis, & per Lemma V, lineola *C D* erit ad lineolam *k t* ut arcus B *D* ad arcum *b t*: nec non, per Lemma XI, lineola naſcens *t k* ad lineolam naſcentem *d c* ut *b t quad.* ad *b d quad.* & ex æquo lineola naſcens *D C* ad lineolam naſcentem *d c* ut B *D* x *b t* ad *b d quad.* ſeu quod perinde eſt, ut $\frac{B\,D \times b\,t}{S\,b}$ ad $\frac{b\,d\ quad.}{S\,b}$, adeoq; (ob æquales rationes $\frac{b\,t}{S\,b}$ & $\frac{B\,D}{S\,B}$) ut $\frac{B\,D\ quad.}{S\,B}$ ad $\frac{b\,d\ quad.}{S\,b}$.



Q. E. D.

Corol. 1. Hinc vires centripetæ ſunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum ap-

plicata ad radios ita ſunt hæ vires inter ſe. Id eſt (ut cum Geometris loquar) hæ vires ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione ſimplici radiorum inverſe: necnon in ratione compoſita ex ratione ſimplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquantur, erunt tum vires centripetæ tum velocitates ut radii, & vice verſa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut radii, vires centripetæ ſunt æquales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice verſa.

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut quadrata radiorum, vires centripetæ ſunt reciproce ut radii, & velocitates æquales: Et vice verſa.

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut cubi radiorum, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata radiorum; velocitates autem in radiorum dimidiata ratione: Et vice verſa.

reciproce

Corol. 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunq; ſimilium, centraq; ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata.

applicatur autem ſubſtituendo æquabilem — arearum deſcriptionem — pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis aſſumendo. (

Scholium

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cæleſtibus (ut ſeorſum colligerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Halleus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis demonſtrationis beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum BC, impellat ipſum per ſpatium CD, quod ipſo motus initio æquale eſt quadrato arcus illius BD ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem ſemper plagam con-

continuata, deſcribat ſpatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum deſcribit, efficiet ut corpus idem recta progrediens deſcribat ſpatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale; adeoq; eſt ad vim gravitatis ut ſpatium illud ad ſpatium quod grave cadendo eodem tempore deſcribit. Et hujuſmodi Propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo Tractatu de Horologio oſcillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur Polygonum laterum quotcunq; Et ſi corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc eſt (ſi Polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id eſt ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; ſi Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis eſt vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

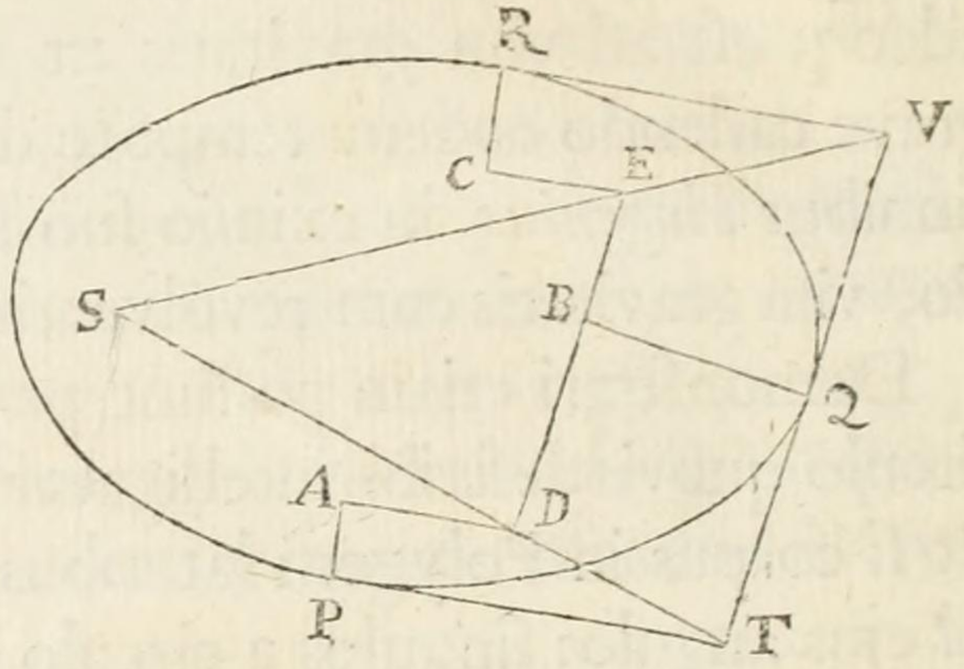
Prop. V. Prob. I.

Data quibuſcunq; in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id eſt ita ut ſit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem

in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentia in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

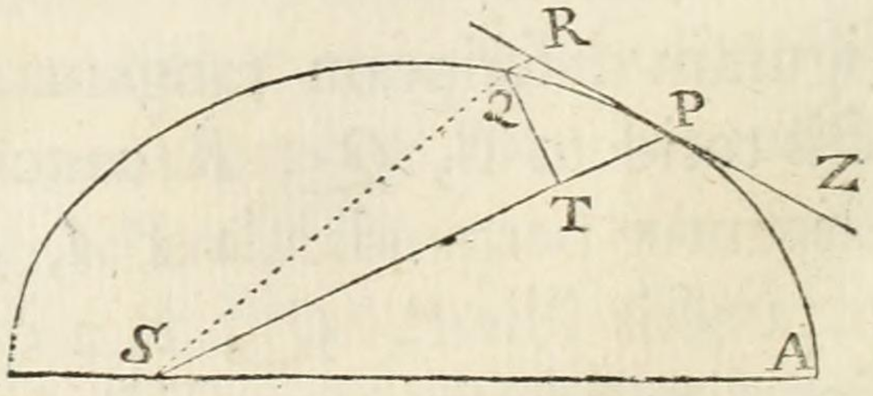
Nam cum corpus in *P* & *Q* radiis ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq; areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in *P* & *Q* ductæ respective in perpendicula a centro in tangentes *PT*, *QT* demissa: Erunt perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoq; ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *V*E versatur. *Q. E. D.*



Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P revolvendo circa centrum S, describat lineam quamvis curvam APQ, tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam SP: Dico quod vis centripeta sit reciproce ut solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$, *si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q.*

Namq; in figura indefinite parva *QRPT* lineola nascens *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) & da-



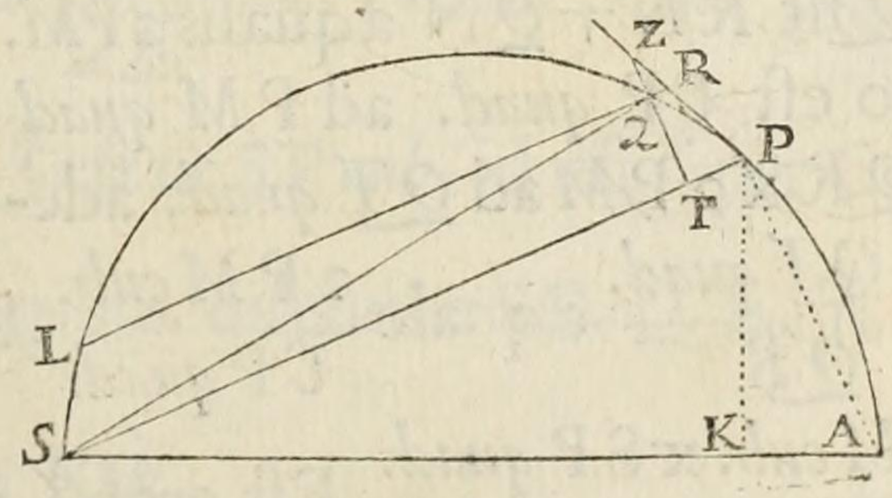
data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola QR directe & quadratum temporis inverse. Est autem tempus ut area SPQ, ejusve dupla $SP \times QT$, id est ut SP & QT conjunctim, adeoq; vis centripeta ut QR directe atq; SP *quad.* in QT *quad.* inverse, id est ut $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ inverse. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrari faciet. Nimirum computandum est solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

Prop. VII. Prob. II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum.

Esto circuli circumferentia $SQPA$, centrum vis centripetæ S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q. Ad diametrum SA & rectam SP demitte perpendicula PK, QT, & per Q ipsi SP parallelam age LR occurrentem circulo in L & tangenti PR in R, & cocant TQ, PR in Z.



Ob similitudinem triangulorum ZQR, ZTP, SPA erit RP *quad.* (hoc est QRL) ad QT *quad.* ut SA *quad.* ad SP *quad.* Ergo $\frac{QRL \times SP\ quad.}{SA\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqua-

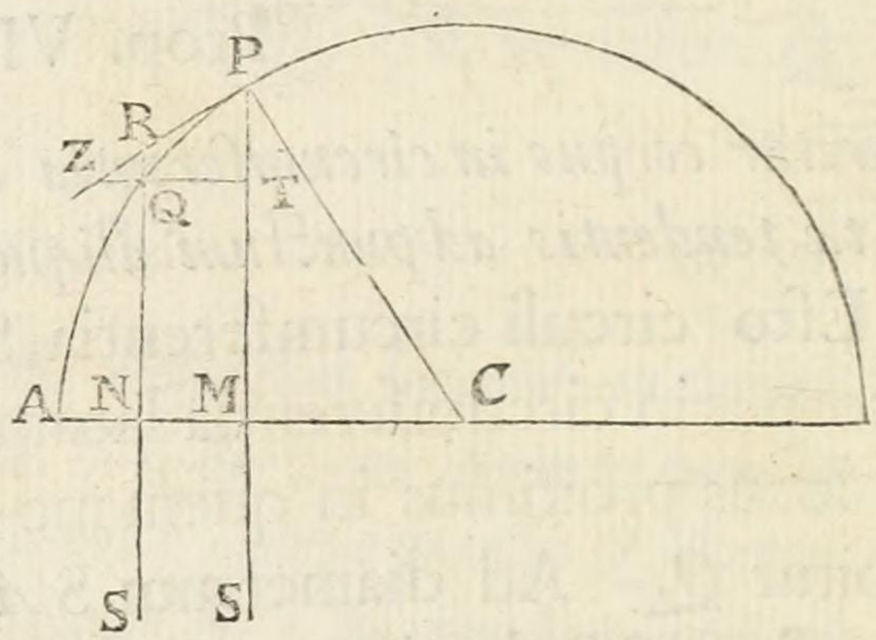
lia

lia in $\frac{\text{S P } quad.}{Q\,R}$, & punctis P & Q coeuntibus, ſcribatur S P pro $R\,L$ Sic fiet $\frac{\text{S P } qc}{\text{S } A\,q}$ æquale $\frac{Q\,T\,q \times \text{S P } q}{Q\,R}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce eſt ut $\frac{\text{S P } qc}{\text{S } A\,q}$, id eſt (ob datum S A *quad*) ut quadrato-cubus diſtantiæ S P. Quod erat inveniendum.

Prop. VIII. Prob. III.

Moveatur corpus in circulo P Q A : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum, ut lineæ omnes P S, R S *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A circuli centro C agatur ſemidiameter $C\,A$ parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungantur C P. Ob ſimilia triangula C P M, & T P Z, vel (per Lem. VIII.) T P Q, eſt C P q. ad P $M\,q$. ut P $Q\,q$. vel (per Lem. VII.) P $R\,q$. ad $Q\,T\,q$. & ex natura circuli rectangulum $Q\,R \times R\,N + Q\,N$ æquale eſt P R quadrato. Coeuntibus autem punctis P, Q fit $R\,N + Q\,N$ æqualis 2 P M. Ergo eſt C P *quad.* ad P M *quad.* ut $Q\,R$ x 2 P M ad $Q\,T$ *quad.* adeoq; $\frac{Q\,T\ quad.}{Q\,R}$ æquale $\frac{2\,\text{P}\,M\,cub.}{C\,\text{P}\,quad.}$, & $\frac{Q\,T\ quad. \times \text{S P } quad.}{Q\,R}$ æquale $\frac{2\,\text{P}\,M\,cub. \times \text{S P } quad.}{C\,\text{P}\,quad.}$. Eſt ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,\text{P}\,M\,cub. \times \text{S P } quad.}{C\,\text{P}\,quad.}$ hoc eſt (neglecta ratione determinata $\frac{2\,\text{S P } quad.}{C\,\text{P}\,quad.}$) reciproce ut P M *cub. Q. E. F.*



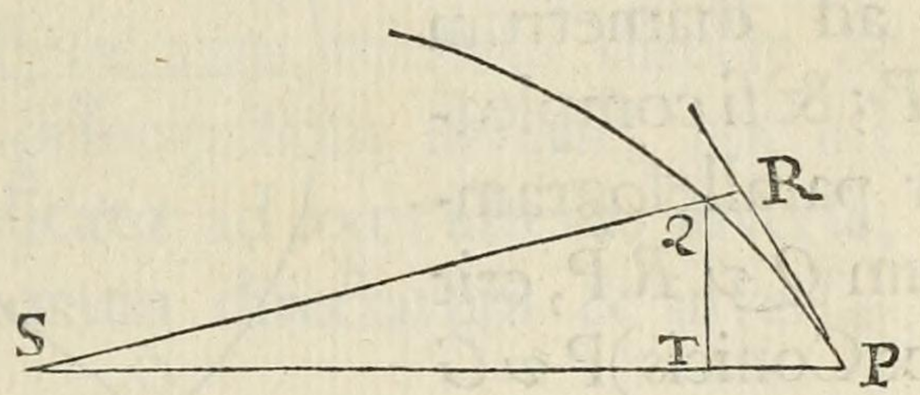
Scho-

Scholium.

Et ſimili argumento corpus movebitur in Ellipſi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.

Gyretur corpus in ſpirali P *Q* S *ſecante radios omnes* S P, S *Q*, *&c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*



Detur angulus indefinite parvus P S *Q*, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura S P *Q R T*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{RQ}$, eſtq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut *Q T*, hoc eſt ut S P. Mutetur jam utcunq; angulus P S *Q*, & recta *Q R* angulum contactus *Q P R* ſubtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipſius P *R* vel *Q T*. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut S P. Quare $\frac{QT\ q \times SP\ q}{QR}$ eſt ut S P *cub.* id eſt (per Corol. Theor. V.) vis centripeta ut cubus diſtantiæ S P. *Q. E. F.*

Lemma XII.

Parallelogramma omnia circa datam Ellipſin deſcripta eſſe inter ſe æqualia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circum diametros ejus deſcriptis.

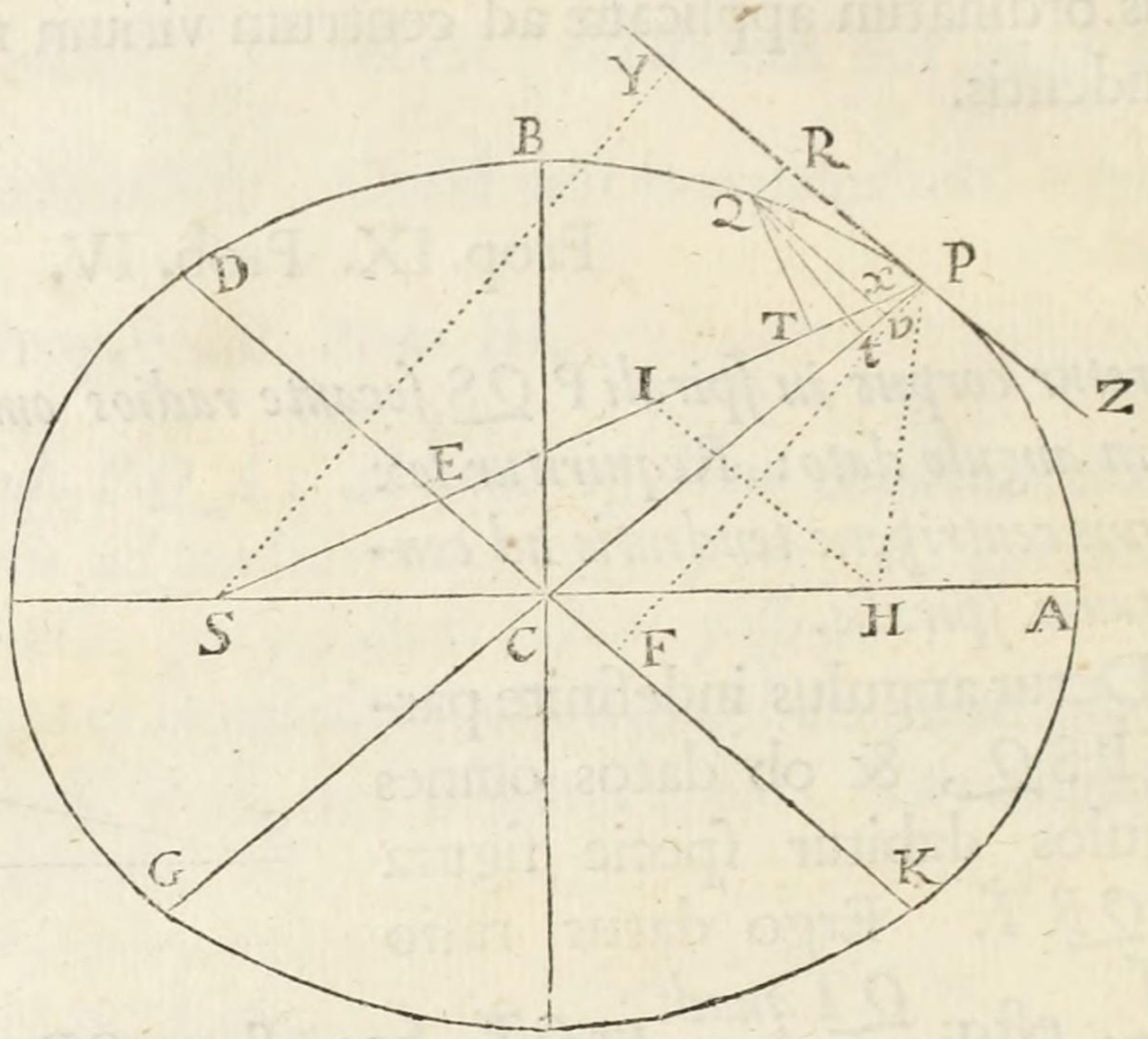
Conſtat utrumq; ex Conicis.

Prop-

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $Qv\,RP$, erit (ex Conicis) $Pv\,G$ ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* eſt ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, $Pv\,G$ ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt $v\,G$ ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CD\,q \times PF\,q}{PC\,q}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2\,PC$ pro $v\,G$, & ductis extremis & medijs in ſe mutuo, fiet $\frac{Qt\,q \times PC\,q}{QR}$ æquale $\frac{2\,BC\,q \times CA\,q}{PC}$ Eſt ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BC\,q \times CA\,q}{PC}$, id eſt



(ob

(ob datum 2 $BC\,q.$ x $CA\,q.$) ut $\frac{1}{PC}$, hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Unde viciſſim ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Figuris univerſis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3 & 7 Prop. IV: In Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe, hoc eſt ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverſe, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilei*. Et ſi Coniſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa.

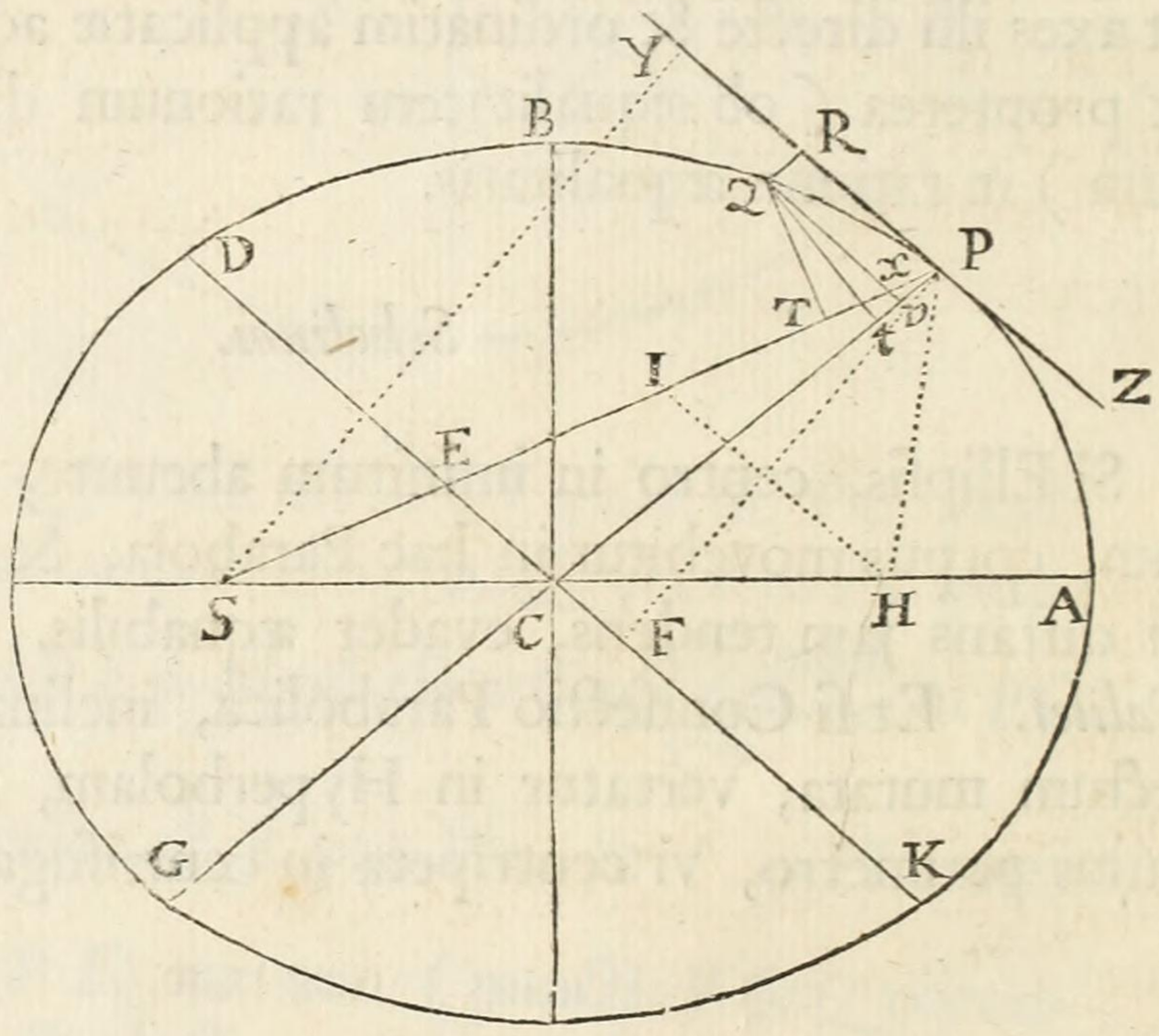
SECT. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos ſuperioris umbilicus S. Agatur *SP* ſecans Ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *Qx*P*R*. Patet *E*P æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico H linea *HI* ipſi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *E*P ſemiſumma ſit ipſarum P S, P *I*, id eſt (ob parallelas *HI*, P *R* & angulos æquales *I*P *R*, *HPZ*) ipſorum P S, P *H*, quæ conjunctim axem totum 2 *AC* adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2\,BC\ quad.}{AC}$) dicto *L*, erit *L* x *QR* ad *L* x P *v* ut *QR* ad *Pv*; id eſt ut *PE* (ſeu *AC*) ad *PC*: & *L* x P *v* ad *G v* P ut *L* ad *G v*; &



& $G v$ P ad $Q v$ *quad.* ut C P *quad.* ad $C D$ *quad*; & (per Lem. VIII.) $Q v$ *quad.* ad $Q x$ *quad.* punctis Q & P coeuntibus, est ratio æqualitatis, & $Q x$ *quad.* seu $Q v$ *quad.* est ad $Q T$ *quad.* ut E P *quad.* ad P F *quad*, id est ut $C A$ *quad.* ad P F *quad.* sive (per Lem. XII.) ut $C D$ *quad.* ad $C B$ *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times Q R$ fit ad $Q T$ *quad.* ut AC ad $PC + L$ ad $Gv + CP\,q$ ad $CD\,q + CD\,q$. ad $CB\,q$. id est ut $AC \times L$ (seu $2\,CB\,q.$) $\times C$-P q. ad $PC \times Gv \times CB\,q$. sive ut 2 PC ad Gv. Sed punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times Q R$ & $Q T$ *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q.}{QR}$ & fiet $L \times SP\,q.$ æquale $\frac{SP\,q. \times QT\,q}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SP\,q.$ id est reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

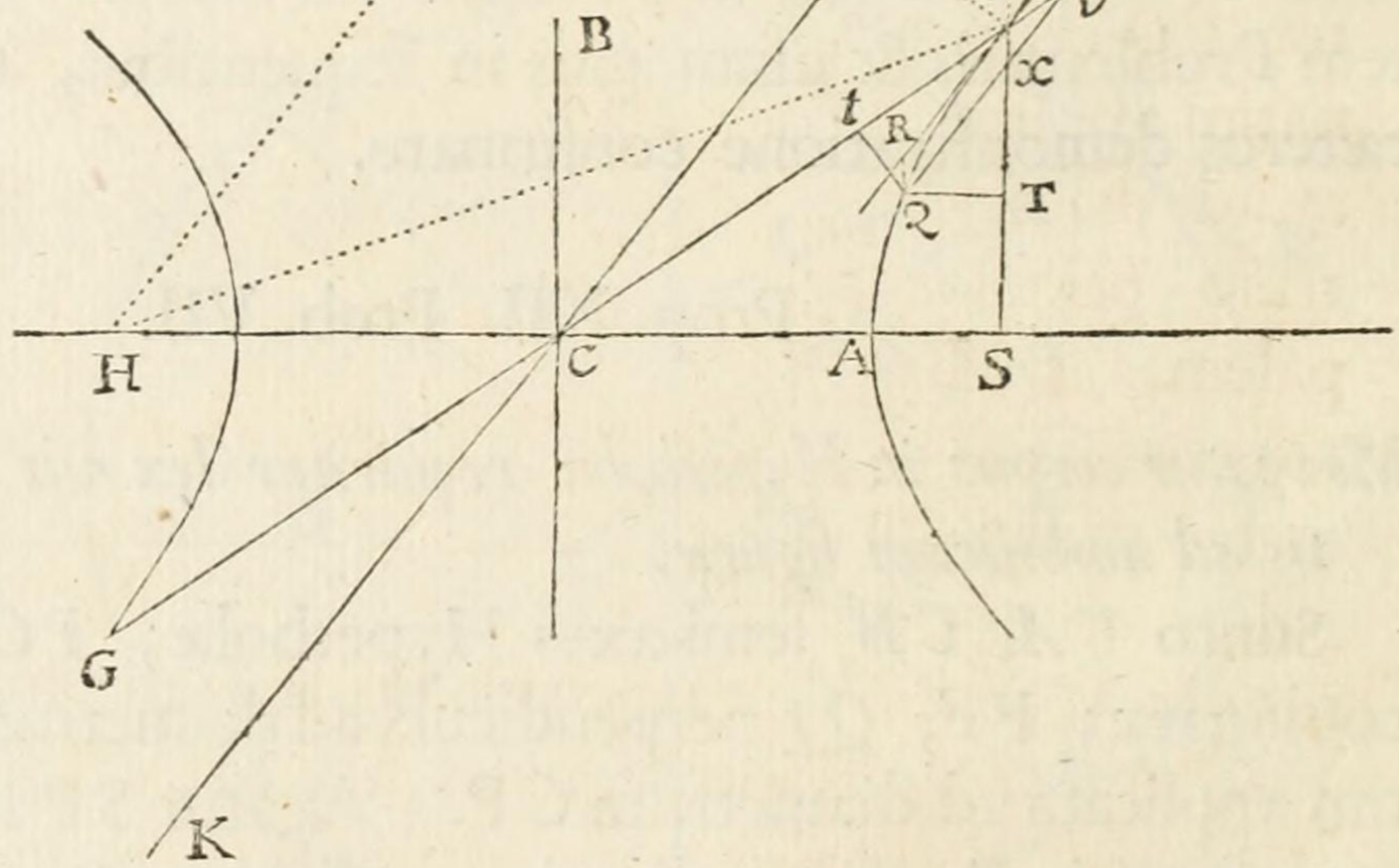
Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

Prop. XII. Prob. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & completur parallelogrammum QRPx. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PI, PH, quarum differentia axem totum $2\,AC$ adæquat. Ad SP de-

demittatur perpendicularis QT. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times P\upsilon$ ut QR ad $P\upsilon$, id est, ut PE (seu AC) ad PC; Et $L \times P\upsilon$ ad $G\upsilon P$ ut L ad $G\upsilon$; & $G\upsilon P$ ad $Q\upsilon q$. ut CPq. ad CDq; & (per Lem. VIII.) $Q\upsilon q$. ad Qxq, punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qxq. seu $Q\upsilon q$. est ad QTq. ut EPq. ad PFq, id est ut CAq. ad PFq, sive (per Lem. XII.) ut CDq. ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq. ut AC ad $PC + L$ ad $G\upsilon + CP$ q. ad $CDq + CDq$. ad CBq: id est ut $AC \times L$ (seu $2BCq$.) $\times P$-Cq. ad $PC \times G\upsilon \times CB$ *quad.* sive ut $2PC$ ad $G\upsilon$, sed punctis Q & P coeuntibus æquantur $2PC$ & $G\upsilon$. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$ & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*



Eo-

Eodem modo demonſtratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam verſa, movebitur in Hyperbola conjugata.

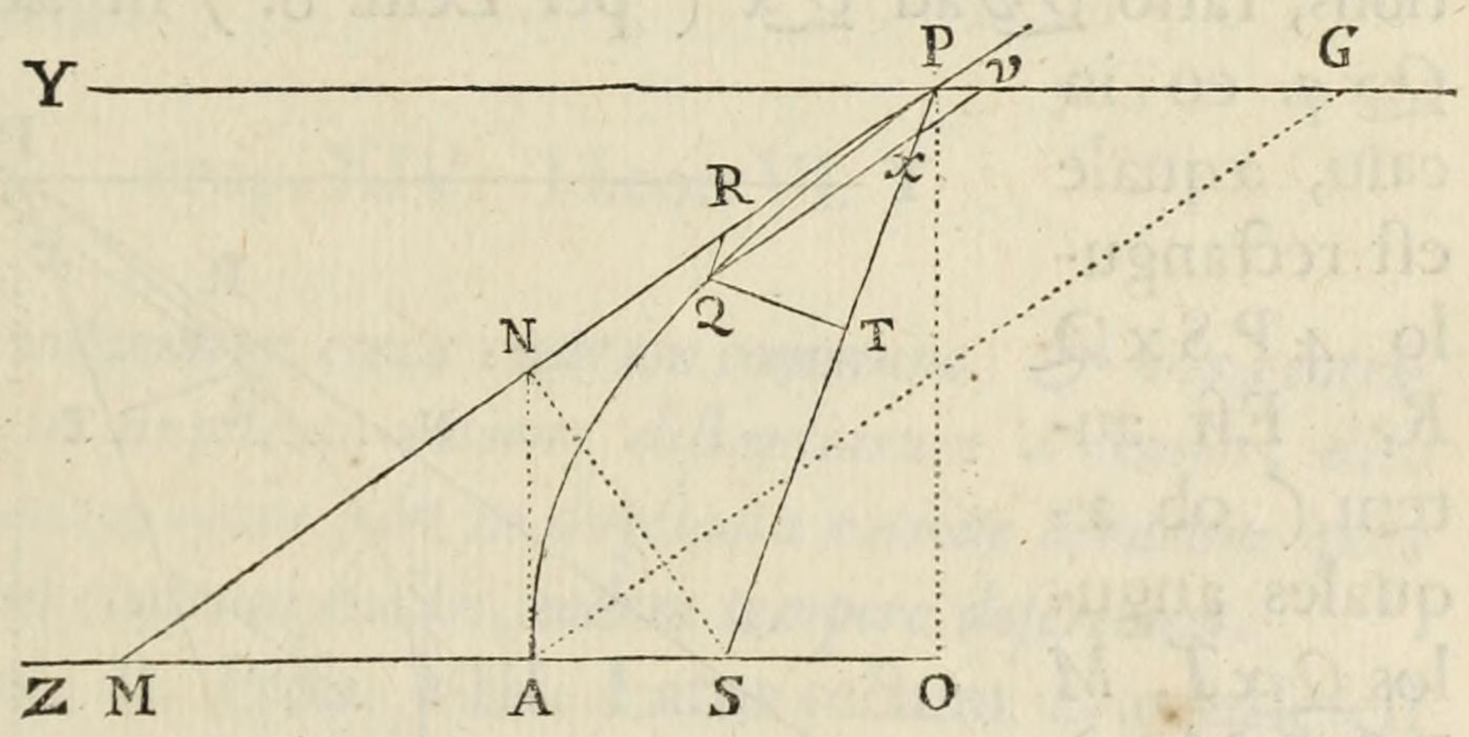
Lemma XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

Lemma XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *A* P *Q* Parabola, S umbilicus ejus, *A* vertex principalis, P punctum contactus, *P O* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *P M* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *S N* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *A N*, & ob æquales *M S* & *S P*, *M N* & *N P*, *M A* & *A O*, parallelæ erunt rectæ *A N* & *O P*, & inde triangulum *S A N* rectangulum erit ad *A* & ſimile triangulis æqualibus *S M N*, *S P N*, Ergo *P S* eſt ad *S N* ut *S N* ad S *A*. *Q*. E. *D*.



Corol. 1. *P S q.* eſt ad *S N q.* ut *P S* ad S *A*.

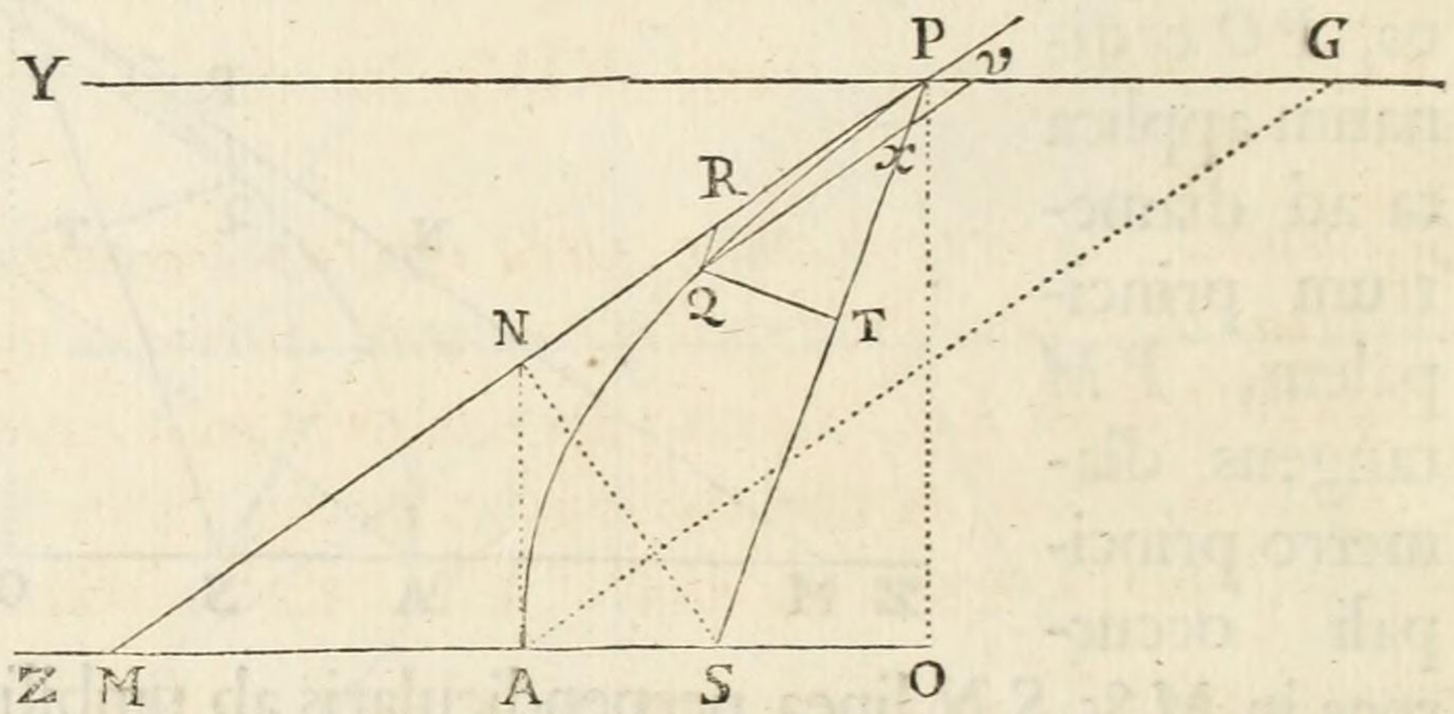
Corol. 2. Et ob datam S *A*, eſt S *N q.* ut P S.

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis P *M* cum recta S *N* quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam *A N*, quæ Parabolam tangit in vertice principali. Prop

Prop. XIII. Prob. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio Lemmatis, ſitq; P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime movetur, age ipſi S P Parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam & occurentem tum diametro ΥPG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, MSP & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR & Pv. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo $4PSxPv$ ſeu $4PSxQR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Lem. 8.) fit æqualitatis. Ergo $Qxq.$ eo in caſu, æquale eſt rectangulo $4PSxQR$. Eſt autem (ob æquales angulos QxT, MPS, PMO) $Qxq.$ ad $QTq.$



ut $PSq.$ ad $SNq.$ hoc eſt (per Corol. I. Lem. XIV.) ut PS ad AS, id eſt ut $4PSxQR$ ad $4ASxQR$, & inde (per Prop. 9. Lib. V Elem.) $QTq.$ & $4ASxQR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$, & fiet $\frac{SPq.xQTq.}{QR}$ æquale $SPq.x4AS$: & propterea (per Corol. Theor. V.) vis centripeta eſt reciproce ut $SPq.x4AS$, id eſt, ob datam $4AS$, reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Corol.

Corol. I. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P, ſecundum lineam quamvis rectam P *R*, quacunq; cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

Corol. II. Et ſi velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola P *R* in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium *Q R*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione cujus latus rectum eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo ſit ubi lineolæ P *R*, *Q R* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta decreſcat in duplicata ratione diſtantiarum a centro; dico quod Orbium Latera *recta ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.*

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum *L* æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & *Q*. Sed linea minima *Q R*, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut S *P q*. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut *Q T q*. x S *P q*. hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione arex *Q T* x S P. *Q. E. D.*

Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eiq; proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione temporis periodici.

Prop.

Prop. XV. Theor. VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata transversorum axium.

Namq; axis minor est medius proportionalis inter axem majorem (quem transversum appello) & latus rectum, atq; adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis transversi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobiq; dimidiata ratio lateris recti & manebit sesquiplicata ratio axis transversi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisq; ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. VideFig. Prop. X. &. XI.

Ab umbilico S ad tangentem *P* R demitte perpendiculum SΥ & velocitas corporis *P* erit reciproce in dimidiata ratione quantitatis $\frac{S\Upsilon q.}{L}$ Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *P Q* in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens *P* R, id est (ob proportionales *P R* ad *Q T* & *S* P ad SΥ) ut $\frac{SP \times QT}{S\Upsilon}$, sive ut S$\Upsilon$ reciproce & *S* P x *Q T* directe ; estq;

SP x

SP x *QT* ut area dato tempore descripta, id est, per Theor. VI. in dimidiata ratione lateris recti *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoq; velocitas in Conica sectione, in minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in dimidiata ratione lateris recti ad distantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias, hoc est (per Corol. VI. Theor. IV.) reciproce in dimidiata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio dimidiata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem vel æqualibus figuris, vel etiam in figuris inæqualibus, quarum latera recta sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in dimidiata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2 Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in dimidiata ratione distantiæ.

Corol. 7. In Parabola, velocitas ubiq; est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in dimidiata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola ma-

jor quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium ſecundum, velocitas in vertice Parabolæ eſt in hac ratione, & per Corollaria ſexta hujus & Theorematis quarti, ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubiq; æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantia dimidii lateris recti Sectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demiſſum. Patet per Corollarium quintum.

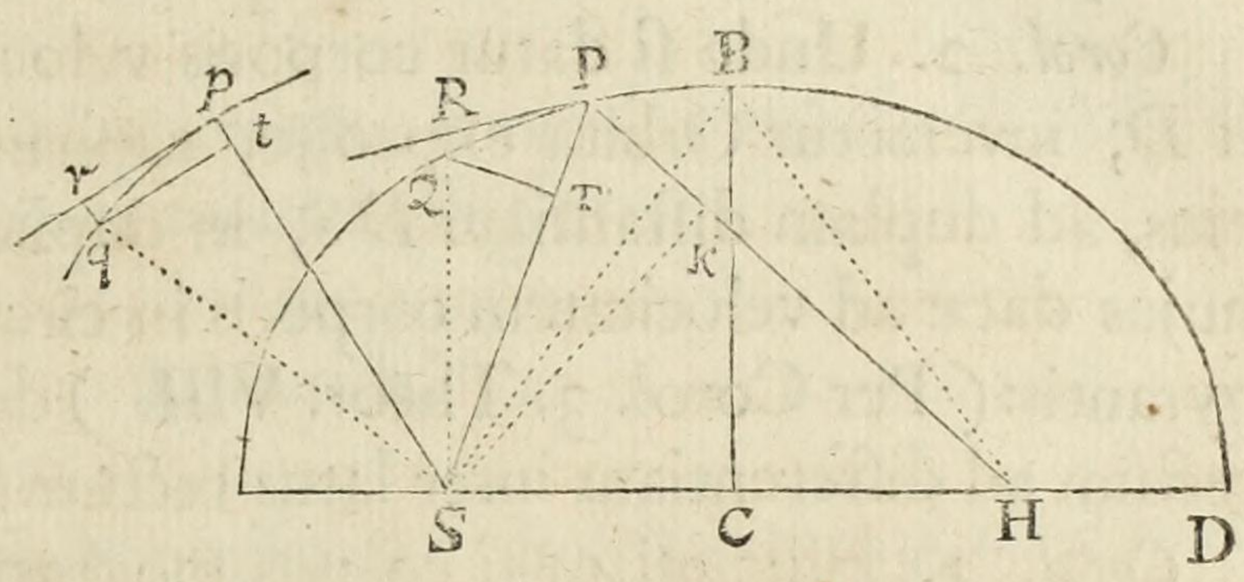
Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Theor. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

Prop. XVII. Prob. IX.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea quam corpus deſcribit, de loco dato cum data velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea ſit quæ corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyrare faciat, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*. De loco P ſecundum lineam P *R* exeat corpus P cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coniſectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P* R tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Theor. VIII.) latus rectum Coniſectionis ad latus rectum-

um orbitæ datæ, in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atq; adeo datur. Sit iſtud *L*. Datur præterea Coniſectionis umbilicus S. Anguli *R*PS complementum ad duos rectos fiat angulus *R*P*H*, & dabitur poſitione linea P*H*, in qua umbilicus alter H locatur.



Demiſſo ad P*H* perpendiculo *S* K,& erecto ſemiaxe conjugato *B C*,eſt *SP q.* − 2 *K*P*H*+ P*H q.*(per Prop.13. *L*ib. II.Elem.)=*SH q.*=4*C H q.*=4*B H q.* −4*BC q.* =$\overline{\text{SP+PH}}$*quad.* −*L* x$\overline{\text{SP+PH}}$=SP*q.* +2SP*H* +P*H q.* −*L* x$\overline{\text{SP+PH}}$. Addantur utrobiq; 2 *K* P*H*+*L* x $\overline{SP+PH}$−SP*q.* −P*H q.*& fiet *L* x $\overline{SP+PH}$=2 *SP H*+ 2 *K*-P*H*, ſeu *S*P+P*H* ad P*H* ut 2 *S*P+ 2 *K* P ad *L*. Unde datur P*H* tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam 2 *S*P+ 2 *K* P, jacebit P*H* ad eandem partem tangentis P*R* cum linea P*S*, adeoq; figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, *H*, & axe principali SP+P*H*, dabitur: *S*in tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum *L* æquale fuerit 2 SP+ 2 *K* P, longitudo P*H* infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens *SH* parallelum lineæ P*K*, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo P*H* ad alteram partem tangentis, adeoq; tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum S P & P*H*, & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1 Hinc in omni Coniſectione ex dato vertice principali *D*, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo *D H* ad *D* S ut eſt latus rectum ad differentiam inter la-

tus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP$ ad L, in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & divisim DS ad DH ut $4DS - L$ ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis: (Per Corol. 3. Theor. VIII.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunq; Conica, & ex orbe suo impulsu quocunq; exturbetur; cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex serierei analogia, mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

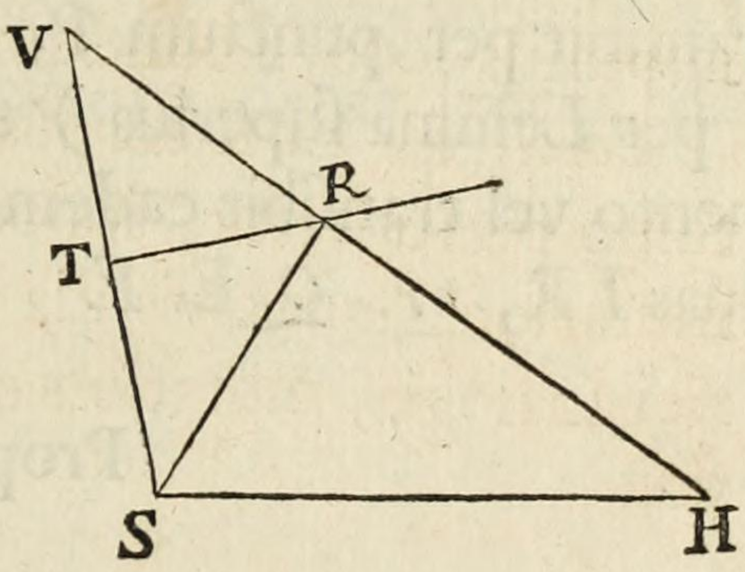
SECT.

SECT. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

Lemma XV.

Si *ab Ellipſeos vel Hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S,H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV, HV, quarum una HV æqualis ſit axi tranſverſo figuræ, altera SV a perpendiculo TR in ſe demiſſo biſecetur in T; perpendiculum illud TR ſectionem Conicam alicubi tangit: & contra, ſi tangit, erit VH æqualis axi figuræ.*



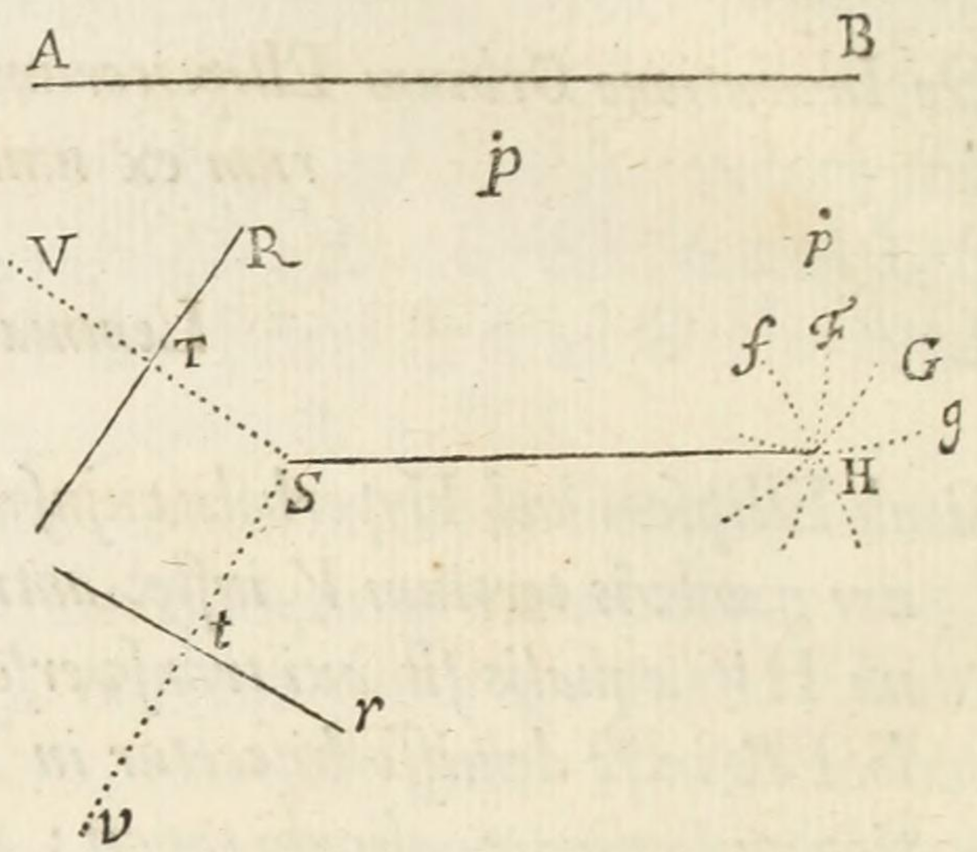
Secet enim *VH* ſectionem conicam in *R*, & jungatur *SR*. Ob æquales rectas *TS*, *TV*, æquales erunt anguli *TRS*, *TRV*. Biſecat ergo *RT* angulum *VRS* & propterea figuram tangit: & contra. *Q.E.D.*

Prop. XVIII. Prob. X.

Datis umbilico & axibus tranſverſis deſcribere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figuraram; *AC* longitudo axis tranſverſi Trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod Trajectoria debet tranſire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro P intervallo *AB* − SP, ſi orbita ſit Ellipſis, vel *AB* + SP, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus HG. Ad tangentem *TR* demittatur perpen-

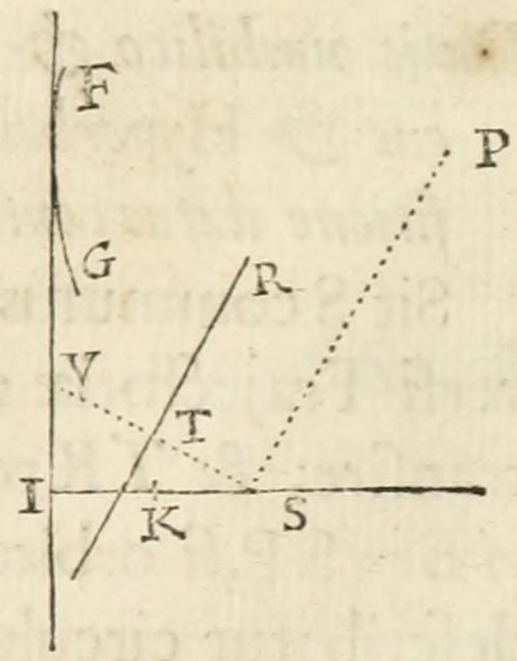
pendiculum *ST*, & producatur ea ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*; centroq; *V* & intervallo *A C* deſcribatur circulus *F*H. Hac methodo ſive dentur duo puncta P, *p*, ſive duæ tangentes *TR*, *tr*, ſive punctum P & tangens *TR*, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod PH + SP in Ellipſi, & PH − *S*P in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per *L*emma ſuperius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. *Q. E. F.*



Prop. XIX. Prob. XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & *TR* tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS deſcribe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem S*T*, & produc eam ad *V*, ut ſit *TV* æqualis S*T*. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* ſi dantur duo puncta P,



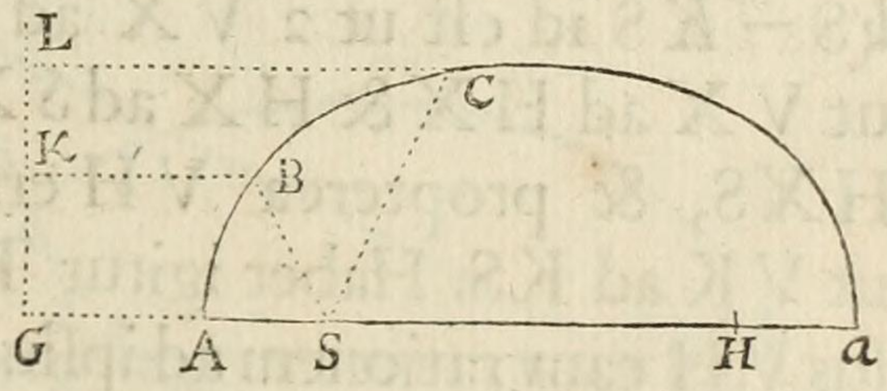
p, vel

p; vel tranſeat per duo puncta *V*,*v*, ſi dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & tranſeat per punctum *V*, ſi datur punctum P & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamq; biſeca in *K*; & axe S*K*, vertice principali *K* deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales S*K* & *I*K, SP & *F*P tranſibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum S*TR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*

Prop. XX. Prob. XII.

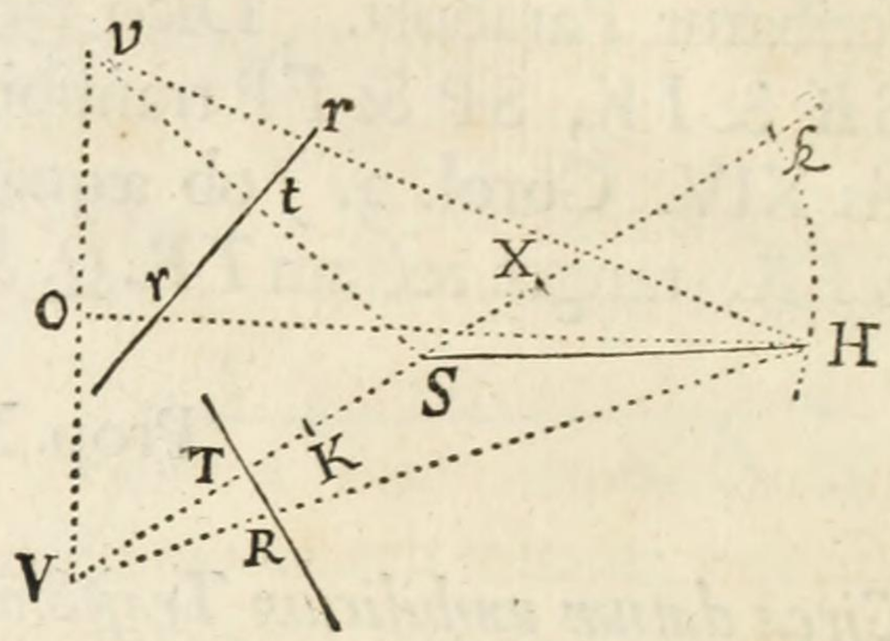
Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S, deſcribenda ſit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis tranſverſi ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemq; ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *SA* ad *AG* & S*a* ad *aG*, ut eſt *SB* ad *BK*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit *SA* ad *A*G ut *Sa* ad *a*G, erit diviſim *Sa* − *SA* ſeu S H ad *a*G − *AG* ſeu *Aa* in eadem ratione, adeoq; in ratione quam habet axis tranſverſus figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumq; ſint *KB* ad BS & *LC* ad *C*S in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifeſtum eſt.



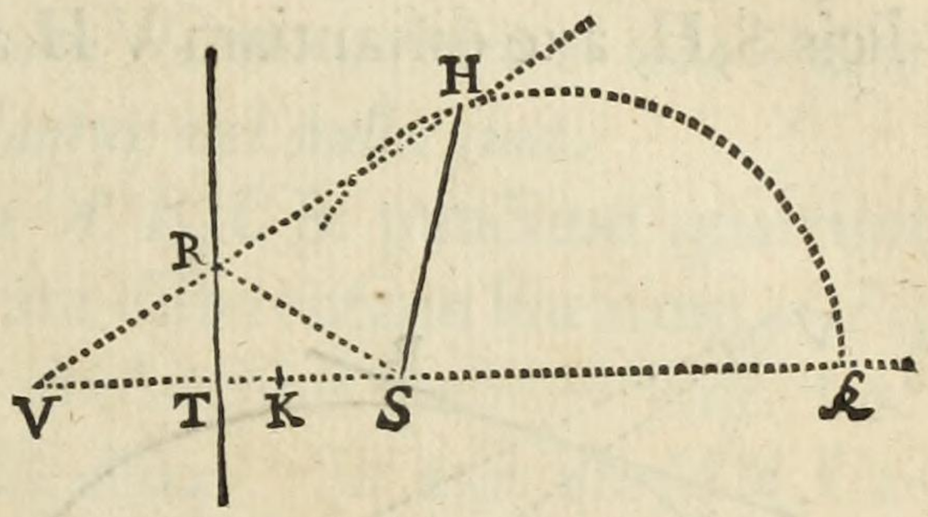
Cas.

Cas. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas *T R*, *t r* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula S*T*, S*t* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *T V*, *t v* æquales *T* S, *t s*. Biſeca *V v* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *O* H, rectamq; *V* S infinite productam ſeca in *K* & *k* ita, ut ſit *V K* ad *K* S & *V k* ad *k* S ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis tranſverſus ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *K k* deſcribatur circulus ſecans rectam *O* H in H; & umbilicis S, H, axe tranſverſo ipſam V H æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *K k* in *X*, & junge H *X*, H S, H V, H *v*. Quoniam eſt V *K* ad *K* S ut V *k* ad *k S*; & compoſite ut V *K* + V *k* ad *K* S + *k* S; diviſimq; ut V *k* − V *K* ad *k* S − *K* S id eſt ut 2 V *X* ad 2 *K X* & 2 K *X* ad 2 S *X*, adeoq; ut V *X* ad H *X* & H *X* ad *S X*, ſimilia erunt triangula V *X* H, H *X* S, & propterea V H erit ad *S* H ut V *X* ad *X* H, adeoq; ut V K ad K S. Habet igitur Trajectoriæ deſcriptæ axis tranſverſus V H eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam S H, quam habet Trajectoriæ deſcribendæ axis tranſverſus ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum V H, *v* H æquentur axi tranſverſo, & V *S*, *v* S a rectis *T R*, *t r* perpendiculariter biſecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.*

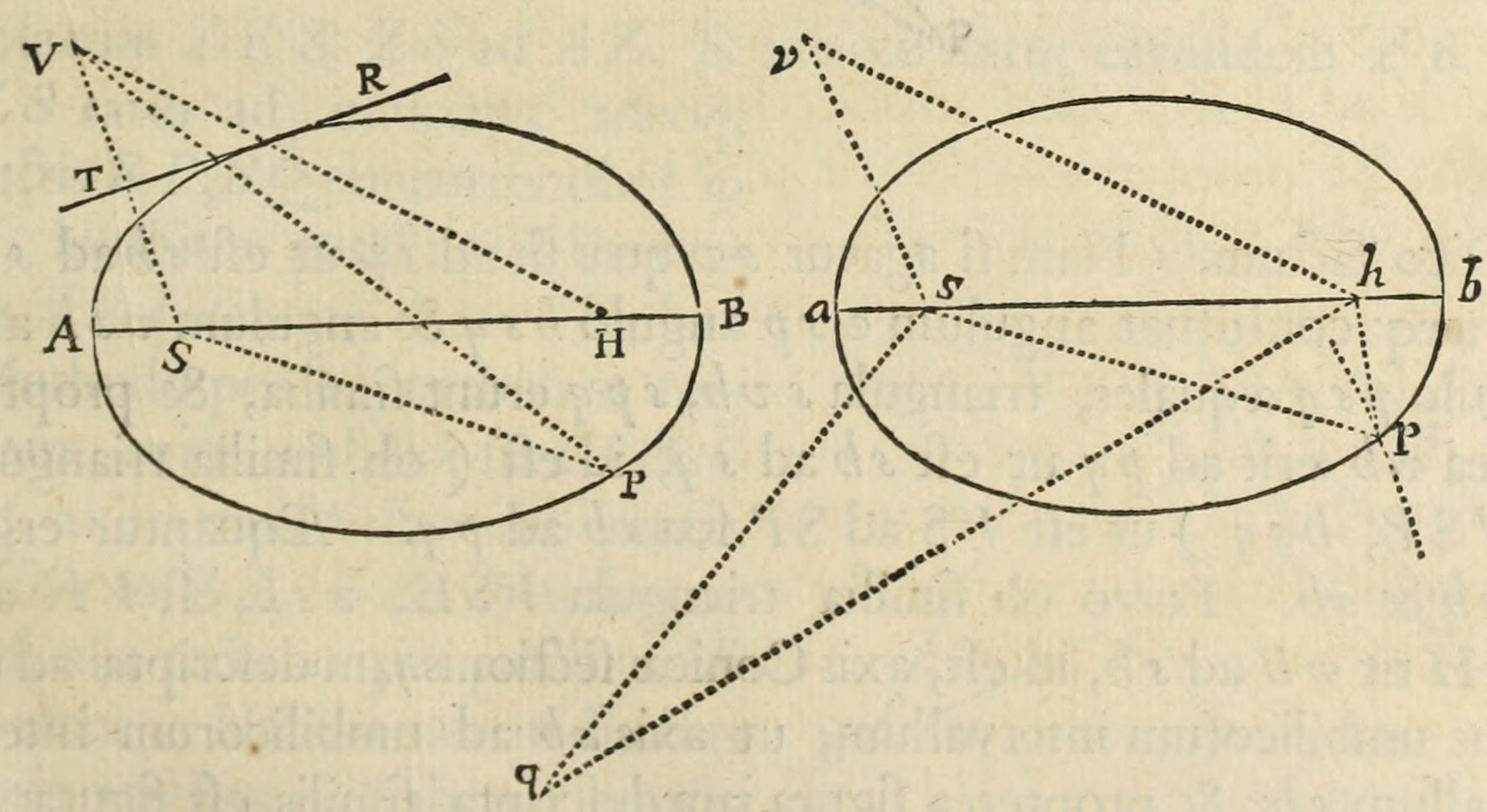


Cas. 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectam *T R* tanget in puncto dato *R*. In rectam *T R* demitte perpendicularem S*T*, & produc eandem ad V, ut ſit *T* V æqualis *S T*. Junge V *R*, & rectam V S infinite productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit *V* K ad S K & *V k* ad S *k* ut Ellipſeos deſcribendæ axis tranſverſus ad diſtantiam umbilicorum; circuloq; ſuper diametro K *k* de-

deſcripto, ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe tranſverſo rectam HV æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Namq; VH eſſe ad SH ut VK ad SK, atq; adeo ut axis tranſverſus Trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in Caſu ſecundo, & propterea Trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribenda: rectam vero TR qua angulus VRS biſecatur, tangere Trajectoriam in puncto R, patet ex Conicis *Q. E. F.*



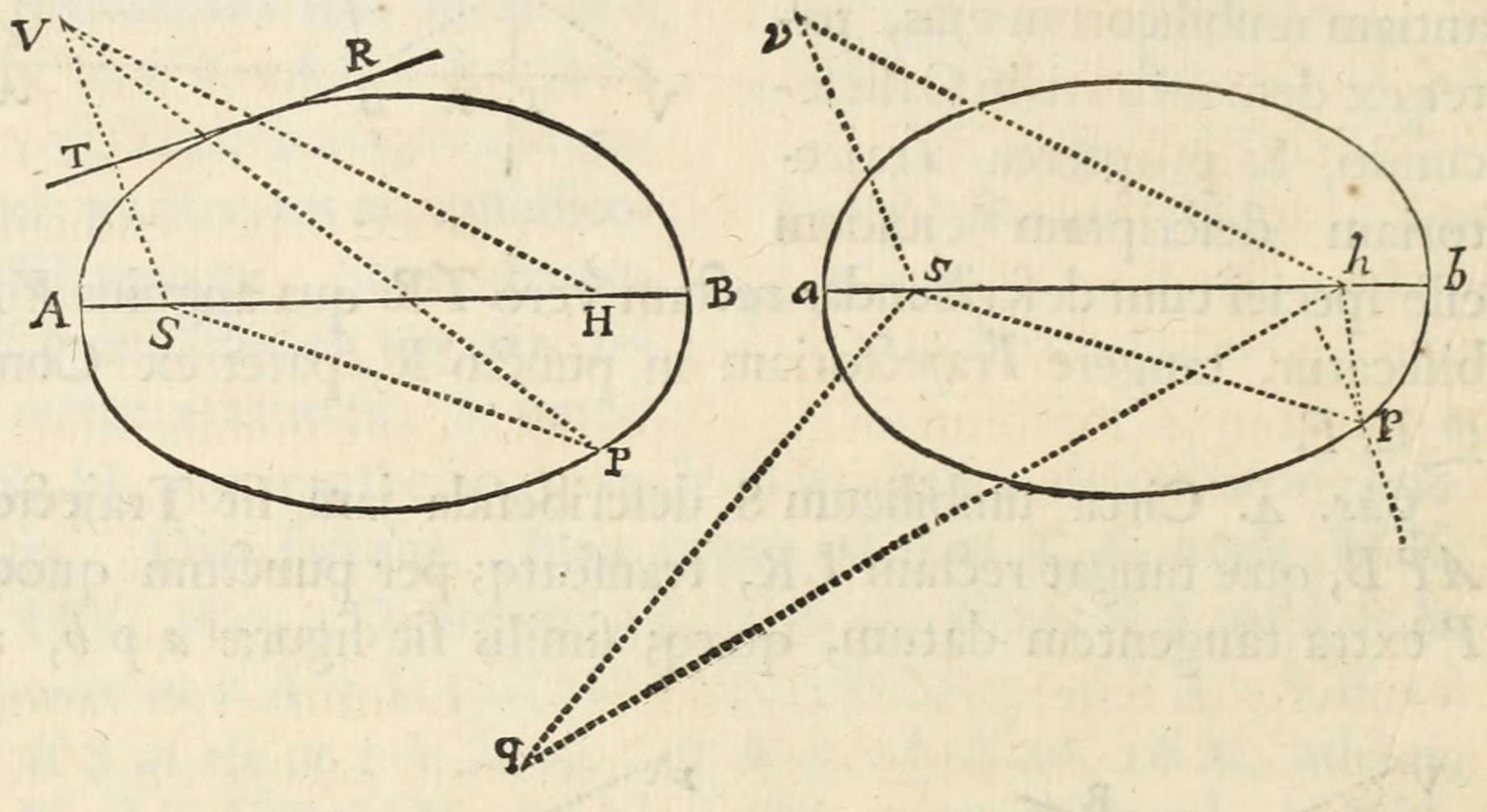
Cas. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit Trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatq; per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæq; ſimilis ſit figuræ apb, axe



tranſverſo ab & umbilicis s, h deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroq; q & intervallo quod ſit ad ab ut SP ad VS deſcribe

cir-

circulum ſecantem figuram *a p b* in *p*. Junge *s p* & age *S H* quæ ſit ad *s h* ut eſt *S P* ad *s p*, quæq; angulum *P S H* angulo *p s h* & angulum V *S H* angulo *p s q* æquales conſtituat. Deniq; umbilicis S, *H*, axe diſtantiam V *H* æquante, deſcribatur ſectio conica.



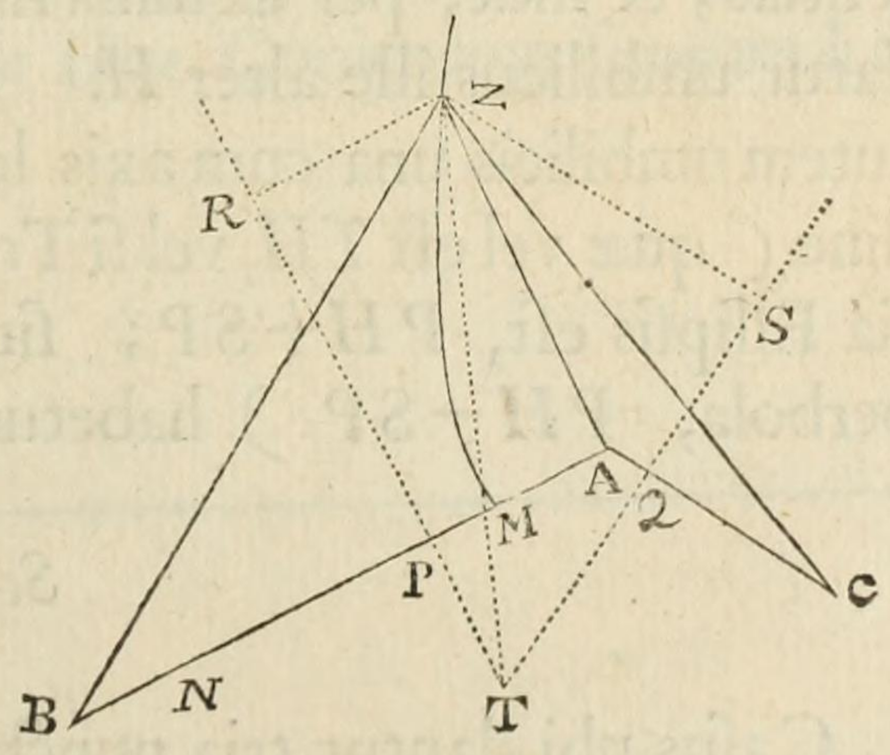
Dico factum. Nam ſi agatur *s v* quæ ſit ad *s p* ut eſt *s h* ad *s q*, quæq; conſtituat angulum *v s p* angulo *h s q* & angulum *v s h* angulo *p s q* æquales, triangula *s v h*, *s p q* erunt ſimilia, & propterea *v h* erit ad *p q* ut eſt *s h* ad *s q*, id eſt (ob ſimilia triangula V S *P*, *h s q*) ut eſt *V* S ad S *P* ſeu *a b* ad *p q*. Æquantur ergo *v h* & *a b*. Porro ob ſimilia triangula *V* S *H*, *v s h*, eſt *V H* ad S *H* ut *v h* ad *s h*, id eſt, axis Conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad ilius umbilicorum intervallum, ut axis *a b* ad umbilicorum intervallum *s h*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *a p b*. Tranſit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *P* S *H* ſimile ſit triangulo *p s h*; & quia *V H* æquatur ipſius axi & *V* S biſecatur perpendiculariter a recta *T R*, tangit eadem rectam *T R*. *Q. E. F.*

Lem.

Lemma XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & axis transversus differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecto *PR* perpendicular ad *AB*, demissoq; *ZR* perpendiculari ad *PR*, erit ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt *A*, *C* & axis transversus differentia inter *AZ* & *CZ*, duciq; potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; adeoq; rectis *RP*, *SQ* concurrentibus in *T*, locabitur punctum *Z* in recta *TZ* positione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt *B* & *C* & axis transversus differentia rectarum *BZ*, *CZ*, inveniri potest alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæsitum *Z* in earum intersectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo bisecante distantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

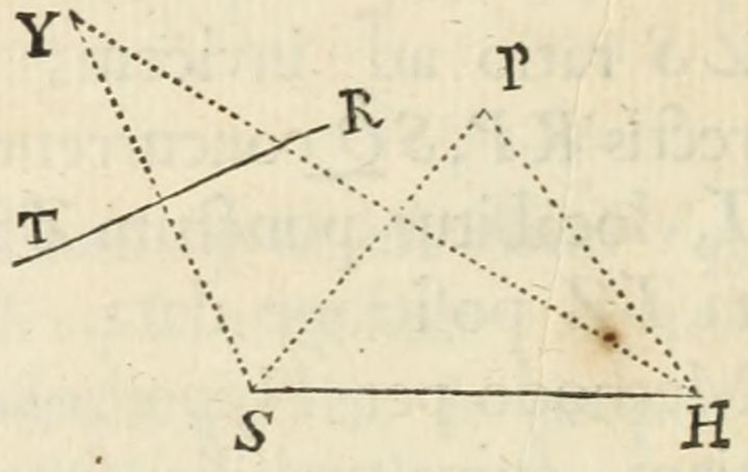
Cas. 3. *Si* omnes tres æquantur, locabitur punctum **Z** in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* tranſeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per *L*ibrum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* reſtitutum.

Prop. XXI. Prob. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.

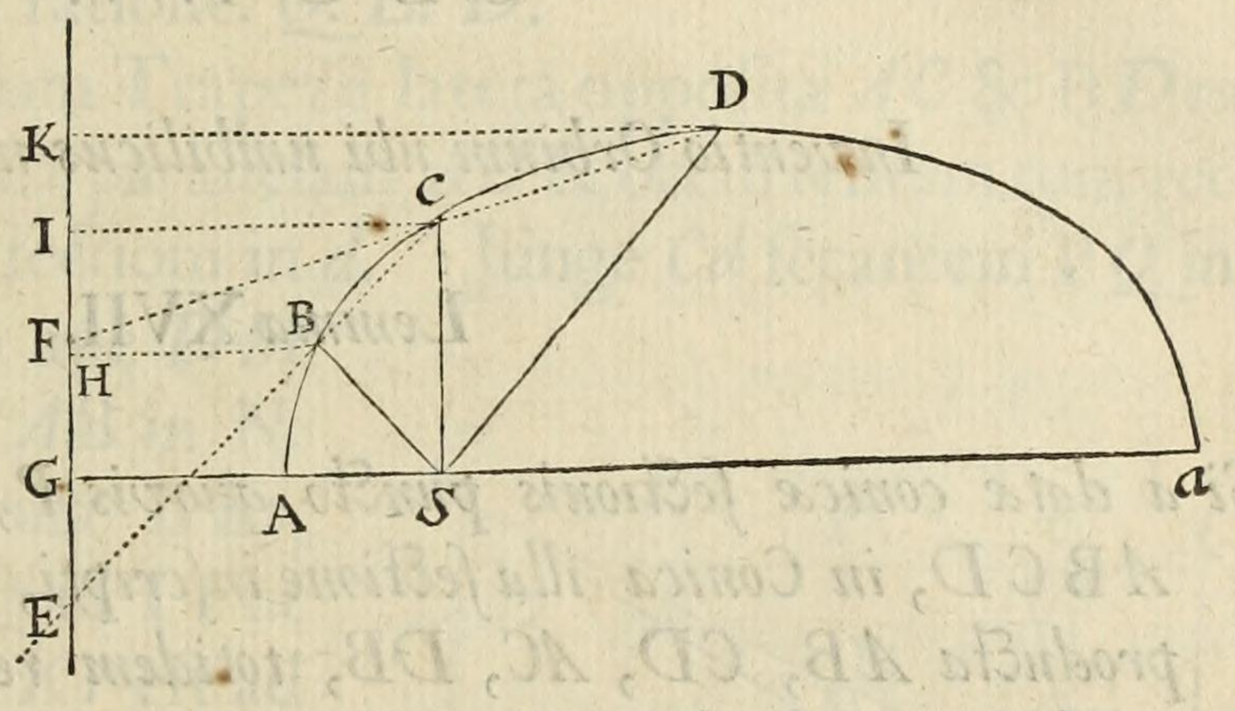
Detur umbilicus S, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus ſit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *Υ*, ut ſit *TΥ* æqualis S*T*, & erit *ΥH* æqualis axi tranſverſo. Junge *SP*, *H*P,& erit S P differentia inter *H* P & axem tranſverſum. *H*oc modo ſi dentur plures tangentes *T* R, vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem *ΥH*, vel P*H*, a dictis punctis *Υ* vel P ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *S*P differunt ab iiſdem, atq; adeo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt *ΥH*, vel ſi Trajectoria Ellipſis eſt, P*H*+S P; ſin *H*yperbola, P*H*−S P) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*,*F*, ut ſit *EB* ad *EC* ut *SB* ad S*C*,& *FC* ad *FD* ut *SC* ad S *D*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales S *G*, B *H*, inq; *G* S infinite producta cape *GA* ad *A*S & *Ga* ad *a*S ut eſt *HB* ad *B*S; & erit *A* ver-

vertex, & *A a* axis transversus Trajectoriæ: quæ, perinde ut *G A* minor, æqualis vel major fuerit quam *A S*, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ *G K* cum puncto *A*; in secundo casu abeunin infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *G K*. Nam si demittantur



ad *G F* perpendicula *C I*, *D K*, erit *I C* ad *H B* ut *E C* ad *E B*, hoc est ut *S C* ad *S B*; & vicissim *I C* ad *S C* ut *H B* ad *S B*, seu *G A* ad *S A*. Et simili argumento probabitur esse *K D* ad *S D* in eadem ratione. Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in Conisectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam *G K* demissa in data illa ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra *De la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop XXV.

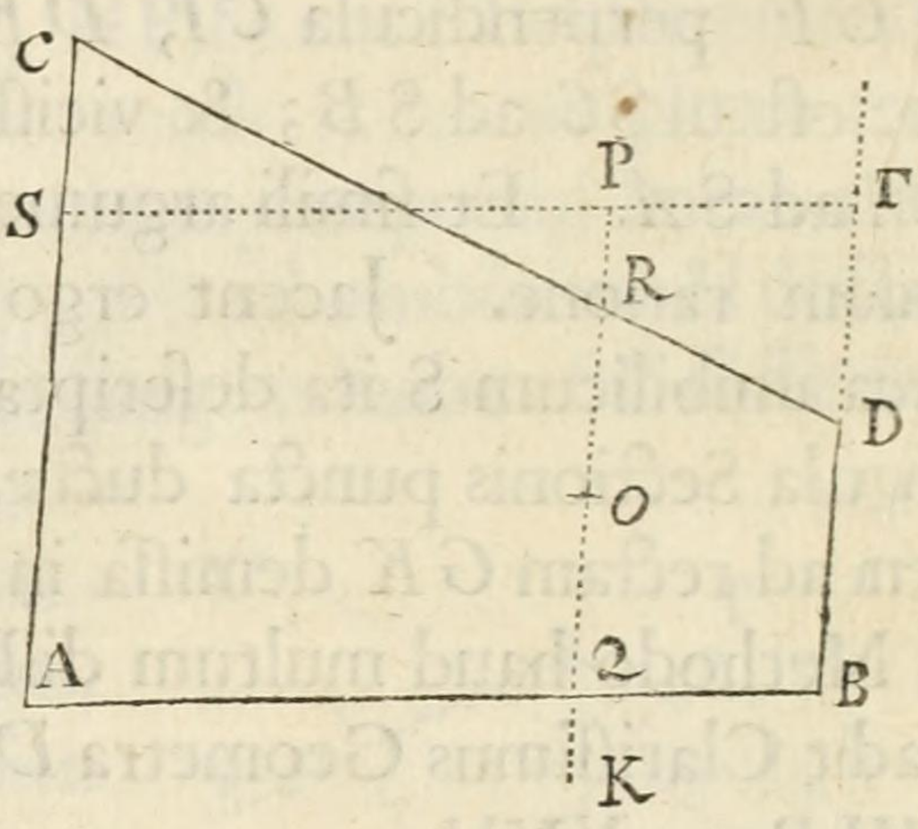
SECT

SECT. V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

Lemma XVII.

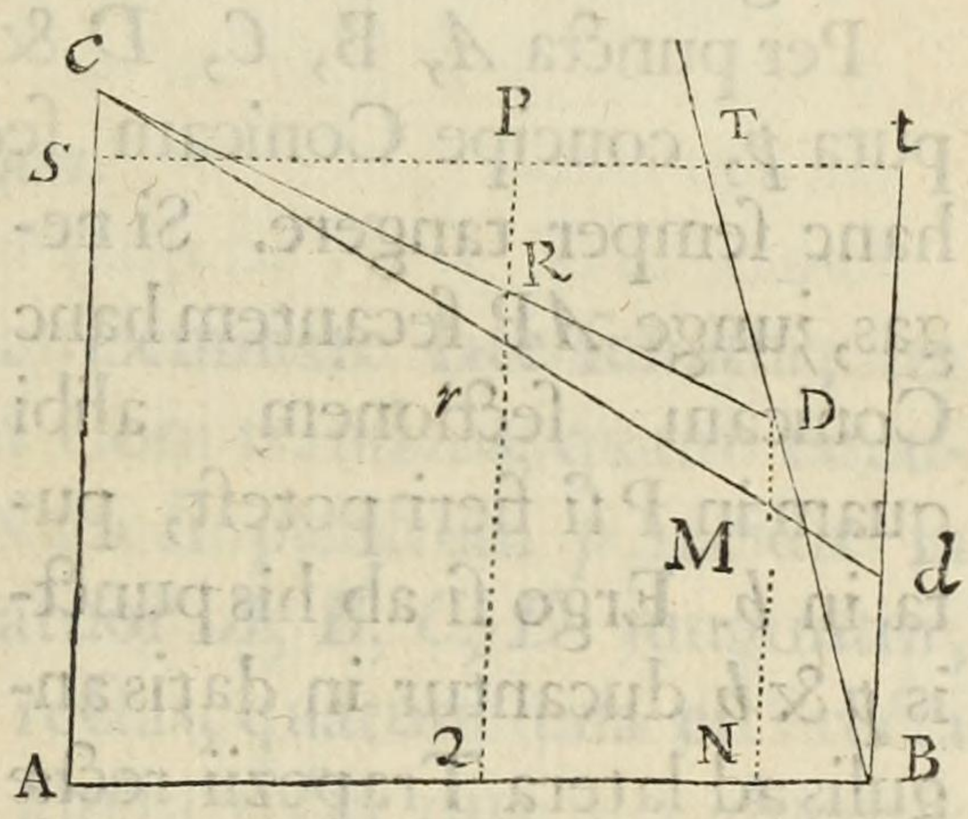
Si a datæ conicæ ſectionis puncto quovis P, *ad Trapezii alicujus* A B C D, *in Conica illa ſectione inſcripti, latera quatuor infinite producta* A B, C D, A C, D B, *totidem rectæ* P Q, P R, P S, P T *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera* P Q x P R, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita* P S x P T *in data ratione.*



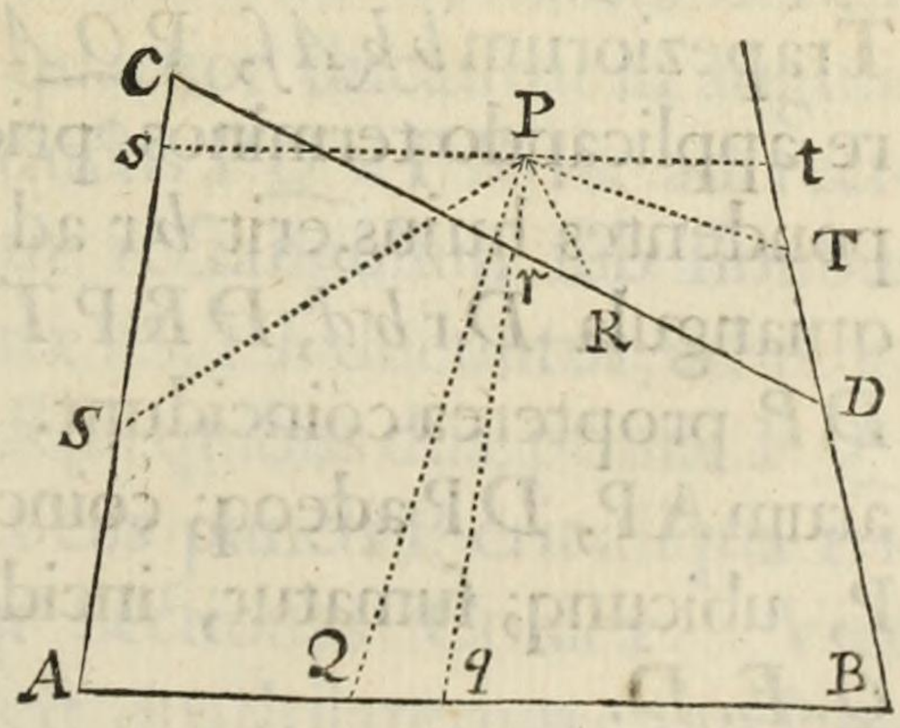
Cas. 1. Ponamus imprimis lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta P Q & P R lateri *A C*, & P S ac P T lateri *A B*. Sintq; inſuper latera duo ex oppoſitis, puta *A C* & *B D*, parallela. Et recta quæ biſecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *R Q*. Sit *O* punctum in quo *R Q* biſecatur, & erit P *O* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc P *O* ad *K* ut ſit *O K* æqualis P *O*, & erit *O K* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, B, P & K ſint ad Conicam ſectionem, & P *R* ſecet *A B* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III *Apollonii*) rectangulum P Q K ad rectangulum *A O B* in data ratione. Sed *Q K* & P *R* æquales ſunt, utpote æqualium *O* K, *O* P, & *O Q*, *O R* differentiæ, & inde etiam rect-

rectangula P*Q*K & P*Q* x P*R* æqualia ſunt; atq; adeo rectangulum P*Q* x P*R* eſt ad rectangulum *AQ*B, hoc eſt ad rectangulum P*S* x P*T* in data ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita *AC* & B*D* non eſſe parallela. Age B*d* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ S*T* in *t*, tum Conicæ ſectioni in *d*. Junge *Cd* ſecantem P*Q* in *r*, & ipſi P*Q* parallelam age *DM* ſecantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob ſimilia triangula B*Tt*, *DBN*, eſt B*t* ſeu P*Q* ad T*t* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* eſt ad *AQ* ſeu PS ut *DM* ad *AN*. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum P*Q* in *Rr* eſt ad rectangulum *Tt* in PS, ita rectangulum *NDM* eſt ad rectangulum *ANB*, & (per Cas. 1) ita rectangulum *QPr* eſt ad rectangulum S*Pt*, ac diviſim ita rectangulum *QPR* eſt ad rectangulum P*S* x P*T*. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus deniq; lineas quatuor P*Q*, P*R*, PS, P*T* non eſſe parallelas lateribus *AC*; *AB*, ſed ad ea utcunq; inclinatas. Earum vice age P*q*, P*r* parallelas ipſi *AC*; & P*s*, P*t* parallelas ipſi *AB*; & propter datos angulos triangulorum P*Q q*, P*Rr*, PS*s*, P*Tt*, dabuntur rationes P*Q* ad P*q*, PR ad P*r*, PS ad P*s* & P*T* ad P*t*, atq; adeo rationes compoſitæ P*Q* in PR ad P*q* in P*r*, & PS in P*T* ad P*s* in P*t*. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio P*q* in P*r* ad P*s* in P*t* data eſt: Ergo & ratio P*Q* in PR ad PS in P*T*. *Q. E. D.*

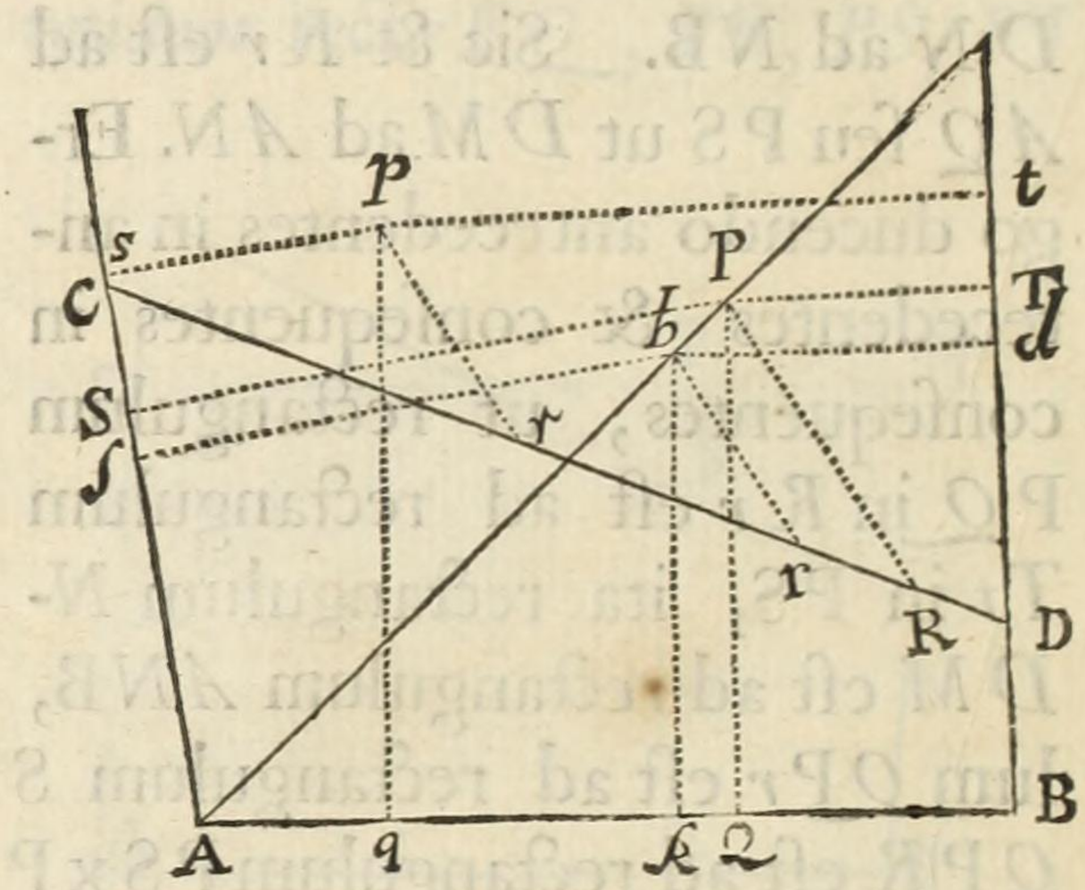


Lem-

Lemma XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii P *Q* x P *R ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* P *S* x P *T in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

Per puncta *A*, B, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum P, puta *p*, concipe Conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge *A* P ſecantem hanc Conicam ſectionem alibi quam in P ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *p q*, *p r*, *p s*, *p t* & *b k*, *b* r, *b ſ*, *b d*; erit ut *b k* x *b* r ad *b d* x *b ſ* ita (per Lemma XVII) *p q* x *p r* ad *p s* x *p t* & ita (per hypoth.) P *Q* x P *R* ad P S x P *T*. Eſt & propter ſimilitudinem Trapeziorum *b k A ſ*, P *Q A* S, ut *b k* ad *b ſ* ita P *Q* ad P S. Quare applicando terminos prioris propoſitionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *b* r ad *b d* ut P *R* ad P *T*. Ergo Trapezia æquiangula *D* r *b d*, *D R* P *T* ſimilia ſunt, & eorum diagonales *D b*, *D P* propterea coincidunt. Incidit itaq; *b* in interſectionem rectarum A P, *D* P adeoq; coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunq; ſumatur, incidit in aſſignatam Conicam ſectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc ſi rectæ tres P *Q*, P R, P S a puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas A B, *C D*, A *C*, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitq; rectangulum ſub duabus ductis P *Q* x P *R* ad quadratum tertii, P S *quad.* in data ratione: punctum

P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C* & contra. Nam coeat linea *BD* cum linea *AC* manente positione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea P*T* cum linea PS: & rectangulum *PS* x P*T* evadet PS *quad.* rectæq; *AB*, *CD* quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

Scholium.

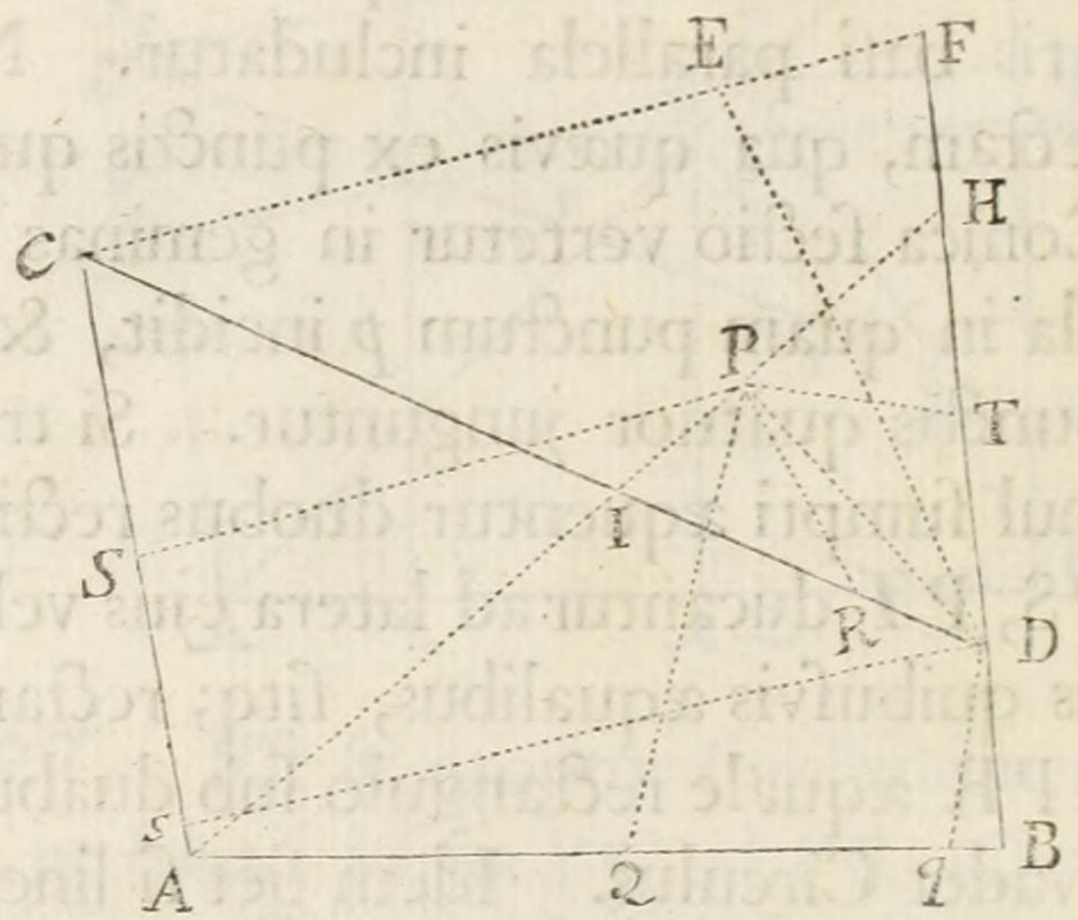
Nomen Conicæ sectionis in hoc *L*emmate late sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem Coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. Nam si punctum *p* incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* junguntur, Conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor P*Q*, P*R*, PS, P*T* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitq; rectangulum sub duabus ductis PS x P*R* æquale rectangulo sub duabus aliis PS x P*T*, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis P*Q* x P*R* sit ad rectangulum sub aliis duabus PS x P*T* ut rectangulum sub sinubus angulorum S, *T*, in quibus duæ ultimæ PS, P*T* ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ P*Q*, P*R* ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire in infinitum, eoq; pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt,

evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

Lemma XIX.

Invenire punctum P, a quo si rectæ quatuor PQ, PR, PS, PT ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, BD singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, PQ x PR, sit ad rectangulum sub aliis duabus, PS x PT, in data ratione.

Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, B, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, adeoq; ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione *PQ* x *PR* ad *PS* x *PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH* atq; adeo punctum P. *Q. E. I.*

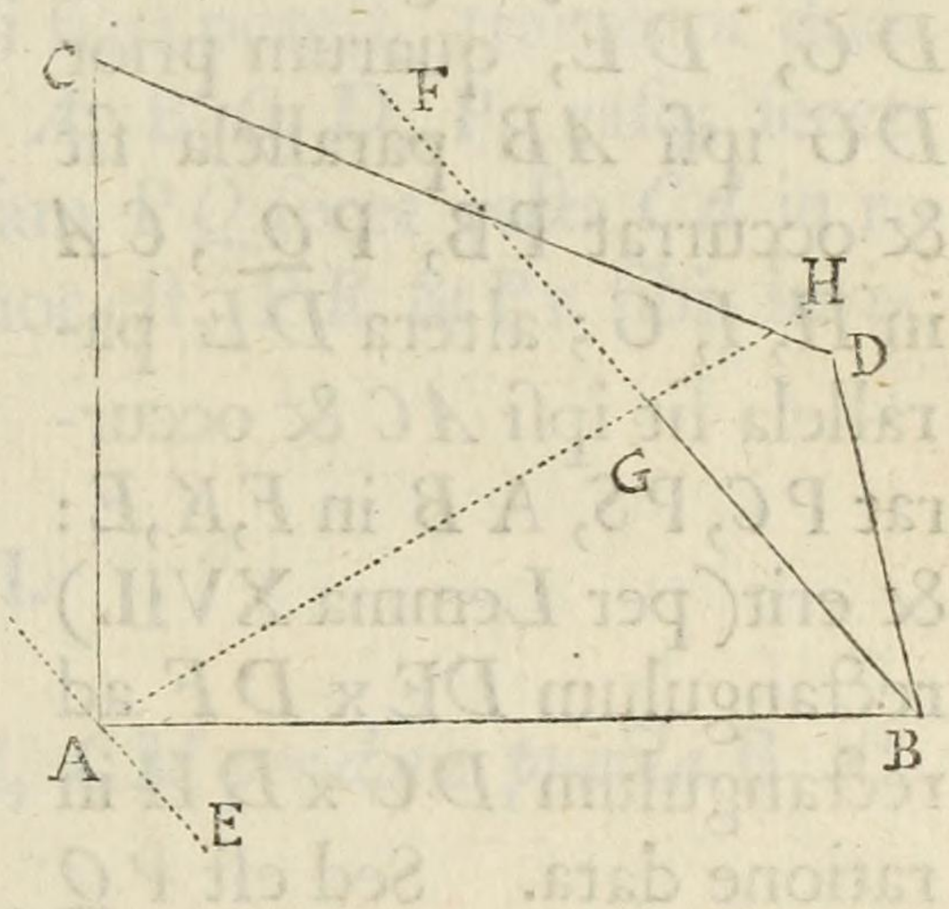


Corol. 1. Hinc etiam ad *Loci* punctorum infinitorum P punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda P*D* ubi puncta P ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *IP* & P*H* invenietur ut supra. Ipsi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occurrentem BD in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*,

&

& *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evaneſcens *IH* parallelæ ſunt, & in *E* & P ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri poteſt. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc Loci tangentem *AE*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF* occurrentem *Lo*-co in *F*. Invenietur autem punctum F per *Lemma* ſuperius. Biſeca *BF* in *G*, & acta *AG* diameter erit ad quam *BG* & FG ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat *Loco* in *H*, & erit *AH* latus tranſverſum, ad quod latus rectum eſt ut *BG q.* ad *AG*-*H*. Si *AG* nullibi occurrit *Loco*, linea *AH* exiſtente infinita, *Lo*-cus erit Parabola & latus rectum ejus $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit,



Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius *G*: & Ellipſis, ubi G intermedium eſt, niſi forte angulus *AGB* rectus ſit & inſuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in caſu circulus habebitur.

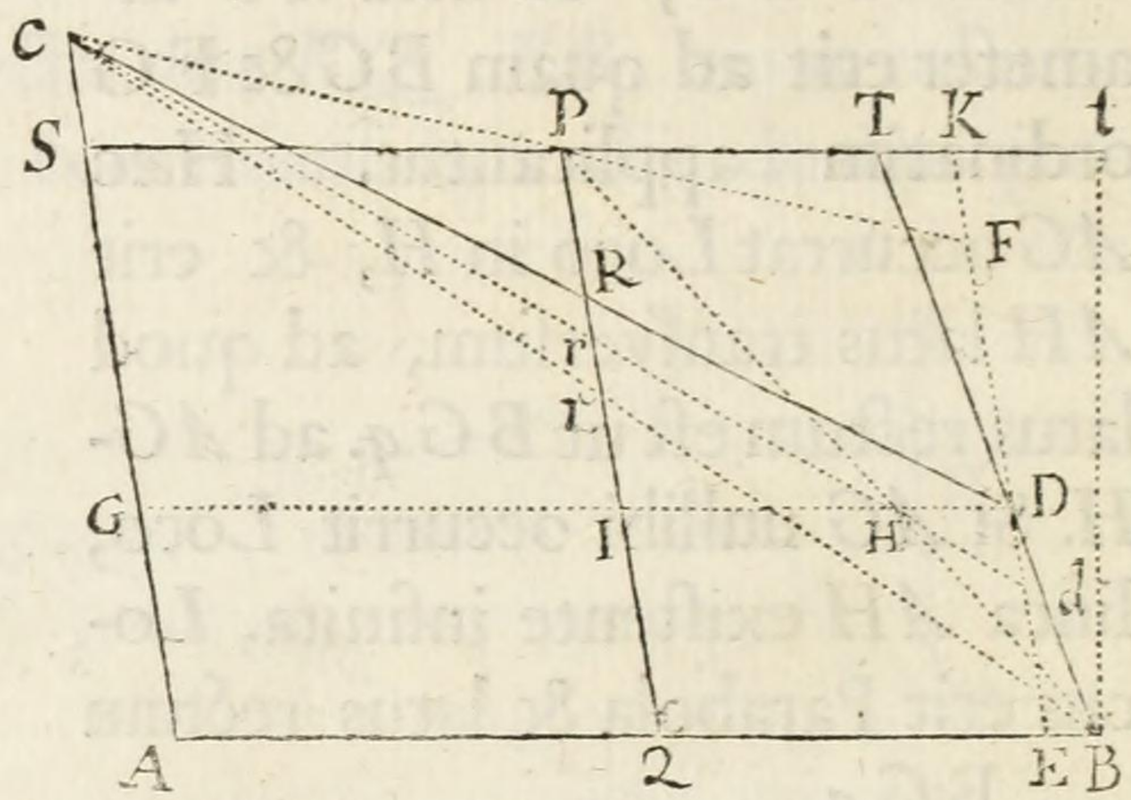
Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

Lemma XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ angulis duabus oppoſitis A & P tangit ſectionem quamvis Conicam in punctis A & P, & lateribus unius angulorum illorum infinite productis AQ, AS occurrit eidem ſectioni Conicæ in B & C; a punctis autem occur-

ſuum B & C *ad quintum quodvis ſectionis Conicæ punctum D agantur rectæ duæ* B D, C D *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* P S, P Q *in* T & R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes* P R & P T *ad invicem in data ratione. Et contra, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in data ratione, punctum D tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, P, C tranſeuntem.*

Cas. 1. Jungantur B P, C P & a puncto *D* agantur rectæ duæ *D G*, *D E*, quarum prior *D G* ipſi *A B* parallela ſit & occurrat P B, P Q, C *A* in *H*, *I*, *G*; altera *D E* parallela ſit ipſi *A C* & occurrat P *C*, P *S*, A *B* in *F*, *K*, *E*: & erit (per *Lemma* XVII.) rectangulum *D*E x *D F* ad rectangulum *D G* x *D H* in ratione data. Sed eſt P Q ad *D E* ſeu I Q, ut P *B* ad *H B*, adeoq; ut P *T* ad *D H*; & viciſſim P Q ad P *T* ut *D E* ad *D H*. Eſt & P *R* ad *D F* ut *R C* ad *D C*, adeoq; ut *I G* vel P *S* ad *D G*, & viciſſim P *R* ad P *S* ut *D* F ad *D G*; & conjunctis rationibus fit rectangulum P Q x P *R* ad rectangulum P *S* x P *T* ut rectangulum *D E* x *D* F ad rectangulum *D G* x *D H*, atq; adeo in data ratione. Sed dantur P Q & P S & propterea ratio P *R* ad P *T* datur. *Q. E. D.*



Cas. 2. Quod ſi P R & P *T* ponantur in data ratione ad invicem, tunc ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum *D E* x *D* F ad rectangulum *D G* x *D H* in ratione data, adeoq; punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam ſectionem tranſeuntem per puncta *A*, *B*, P, *C*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi agatur B *C* ſecans P Q in *r*, & in P *T* capiatur P *t* in ratione ad P *r* quam habet P *T* ad P *R*, erit *B t* Tangens Coni-

Conicæ ſectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evaneſcente, *BT* Tangens evadet; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*

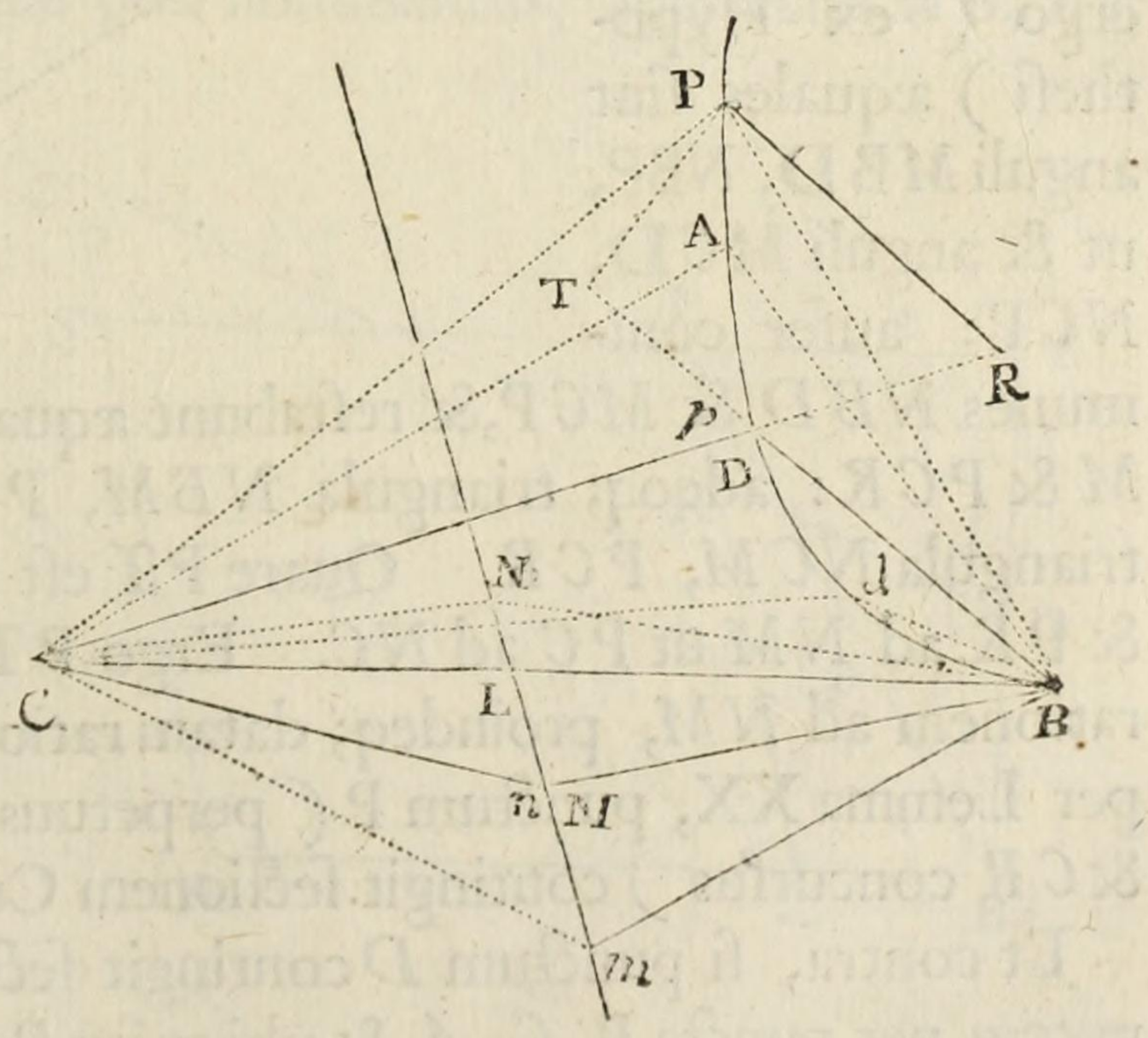
Corol. 2. Et vice verſa ſi B*t* fit Tangens, & ad quodvis Conicæ ſectionis punctum *D* conveniant B*D*, *CD*; erit P*R* ad P*T* ut P*r* ad P*t*. Et contra, ſi ſit P*R* ad P*T* ut P*r* ad P*t*, conveniant B*D*, *CD* ad Conicæ ſectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat Conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ Conicæ ſectiones per quinq; puncta *A*, B, *C*, *D*, P, eaſq; ſecet recta B*D* in punctis *D*, *d*, & ipſam P*Q* ſecet recta *Cd* in r. Ergo P*R* eſt ad P*T* ut P r ad P*T*, hoc eſt, P*R* & P r ſibi invicem æquantur, contra Hypotheſin.

Lemma XXI.

Si rectæ duæ mobiles ceu polos ductæ, concurſu ſuo M deſcribant tertiam poſitione datam rectam MN; & aliæ duæ infinitæ rectæ BD, CD cum prioribus duabus ad puncta illa data B, *C* datos angulos *MBD*, *MCD* efficientes ducantur; dico quod hæ duæ B*D*, *CD* concurſu ſuo *D* deſcribent ſec-

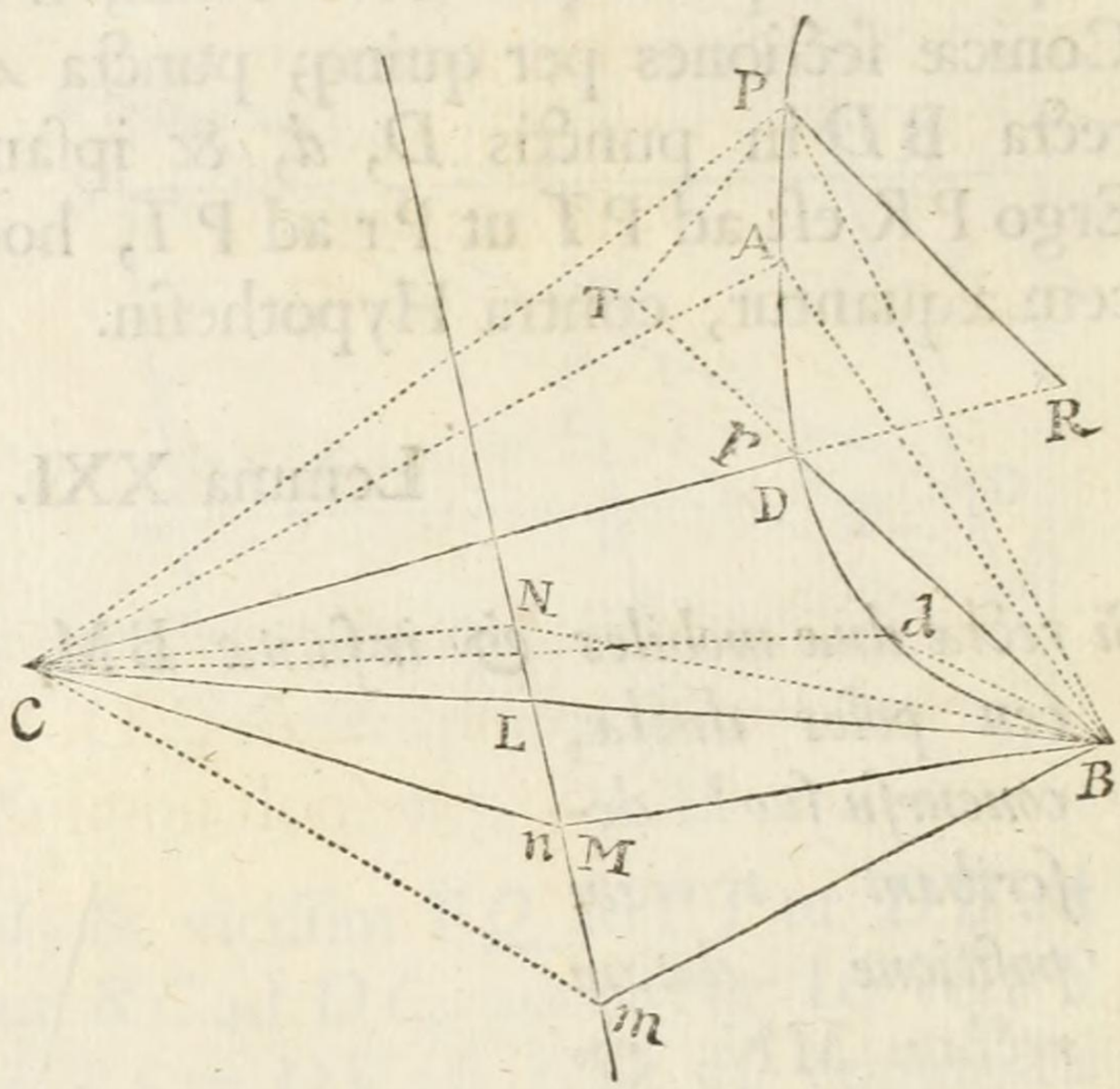
& infinitæ *BM*, *CM* per data puncta B, *C*,



tionem

ionem Conicam. Et vice verſa, ſi rectæ B *D*, *C D concurſu ſuo D deſcribant Sectionem Conicam per puncta* B, *C*, *A tranſeuntem, & harum concurſus tunc incidit in ejus punctum aliquod A, cum alteræ duæ* B *M*, *C M coincidunt cum linea* B *C*, *punctum M continget rectam poſitione datam.*

Nam in recta *M N* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum P. Junge *C N*, B *N*, *C* P, B P, & a puncto P age rectas P *T*, P *R* occurrentes ipſis B D, *C* D in *T* & *R*, & facientes angulum B P *T* æqualem angulo B-*N M* & angulum *C* P *R* æqualem angulo *C N M*. Cum ergo (ex Hypotheſi) æquales ſint anguli *M* B D, *N* BP, ut & anguli *M C* D, *N C* P: aufer communes *N B D* & *M C* P,& reſtabunt æquales *N B M* & P B *T*, *NC-M* & P *C R*: adeoq; triangula *N B M*, P *B T* ſimilia ſunt, ut & triangula *N C M*, P *C R*. Quare P *T* eſt ad *N M* ut P B ad *N B*, & P *R* ad *N M* ut P *C* ad *N C*. Ergo P *T* & P *R* datam habent



rationem ad *N M*, proindeq; datam rationem inter ſe, atq; adeo, per Lemma XX, punctum P (perpetuus rectarum mobilium B *T* & *C R* concurſus) contingit ſectionem Conicam. *Q. E. D.*

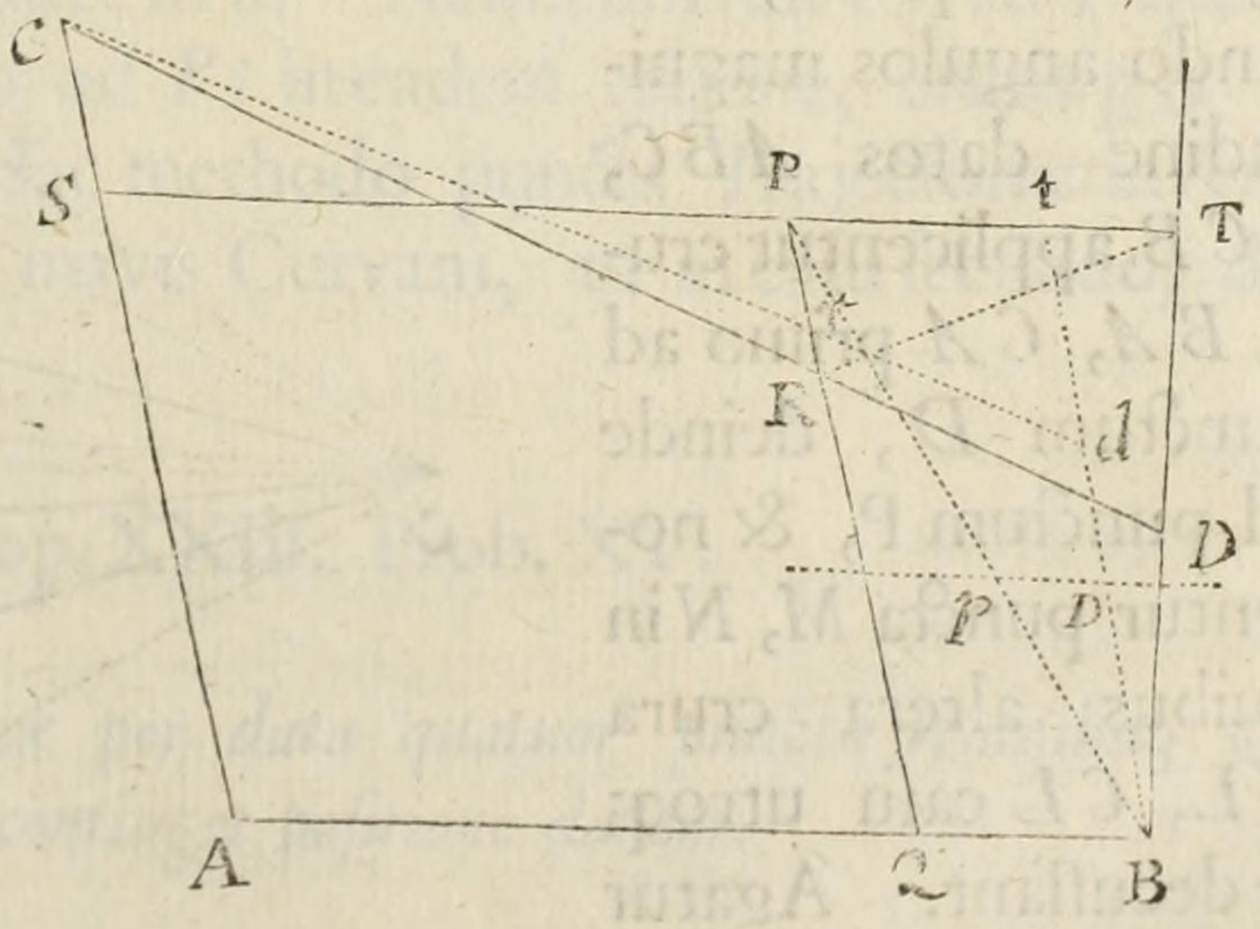
Et contra, ſi punctum *D* contingit ſectionem Conicam tranſeuntem per puncta B, *C*, *A*, & ubi rectæ B *M*, *C M* coincidunt cum recta *B C*, punctum illud *D* incidit in aliquod ſectionis punctum *A*;

A; ubi vero punctum *D* incidit ſucceſſive in alia duo quævis ſectionis puncta *p*, P, punctum mobile *M* incidit ſucceſſive in puncta immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur recta *nN*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* ſectionem Conicam per puncta quinq; *C*, *p*, P, *B*, *A* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum *D* ſectionem Conicam per eadem quinq; puncta *C*, *p*, P, B, *A* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones Conicæ tranſibunt per eadem quinq; puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* verſari in linea curva abſurdum eſt. *Q. E. D.*

Prop. XXII. Prob. XIV.

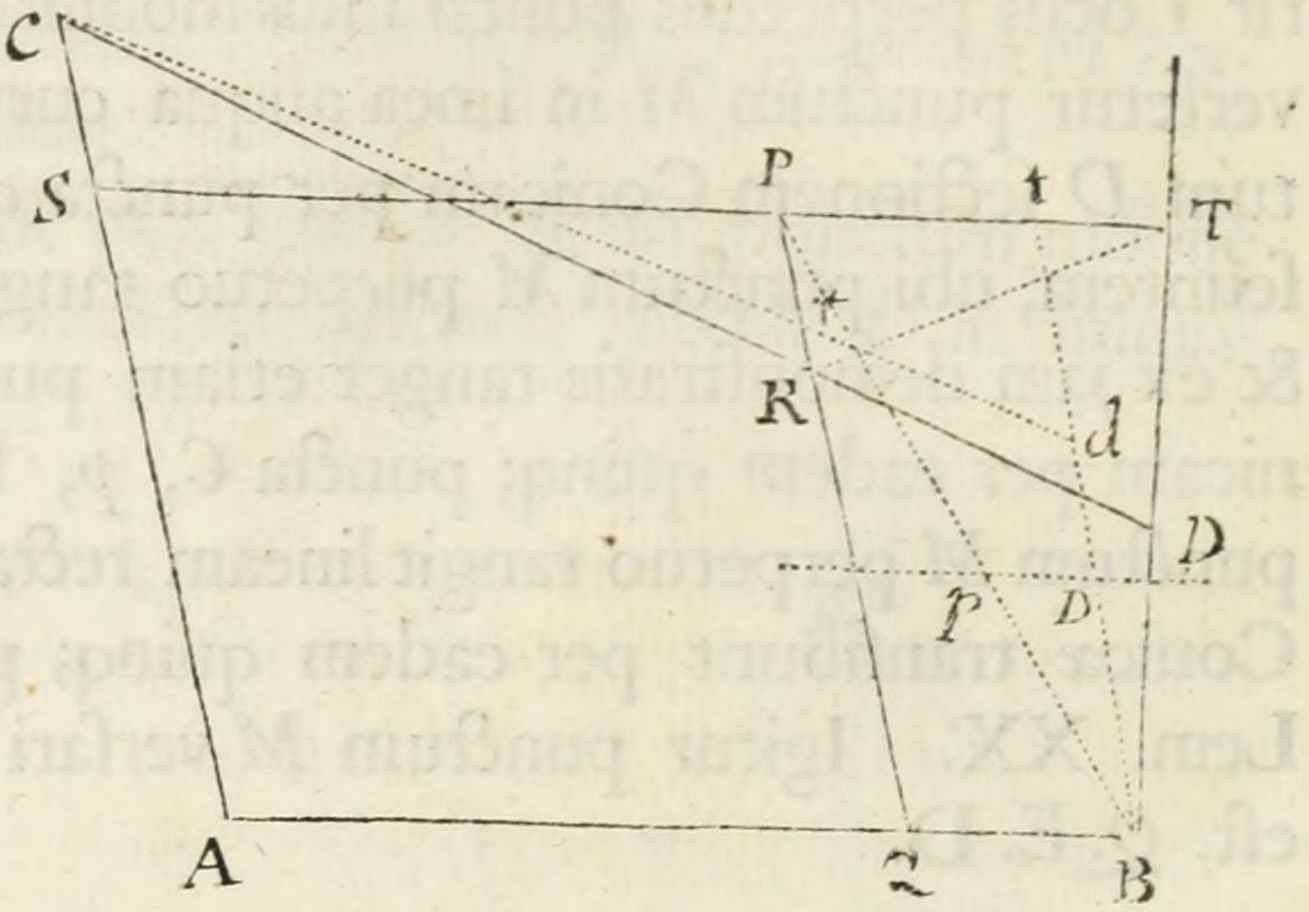
Trajectoriam per data quinq; puncta deſcribere.

*D*entur puncta quinq; *A*, *B*, *C*, D, P. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, C, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC* hiſq; parallelas TPS, P*RQ* per punctum quartum P. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum D infinitas duas *BDT*, *CRD*, noviſſime ductis TPS, P*RQ* (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurentes in T & R. Deniq; de rectis PT, P*R*, acta recta *tr* ipſi T*R* parallela, abſcinde quas-



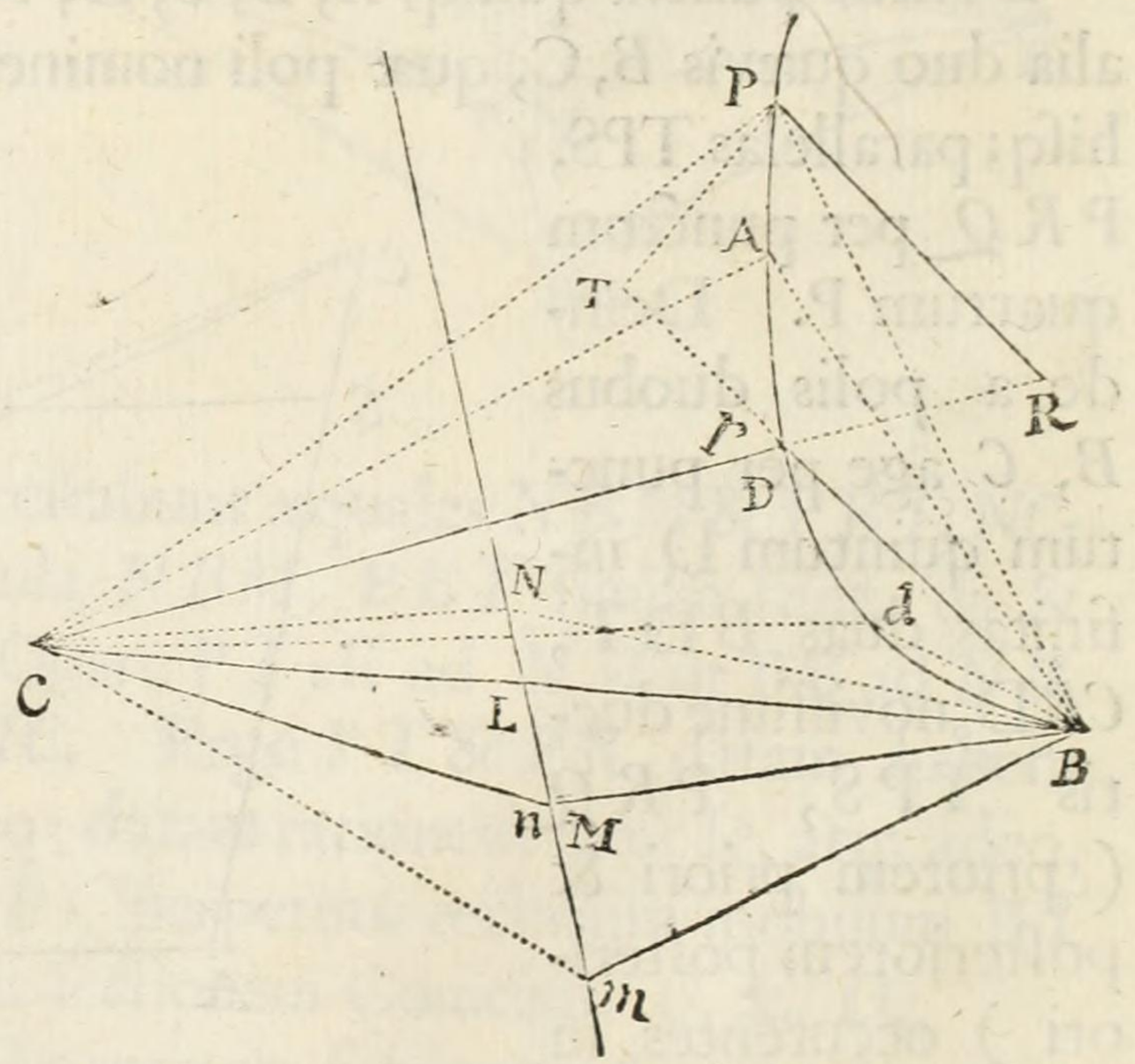
vis

vis P*t*, P*r* ipſis P*T*, P*R* proportionales, & ſi per earum terminos *t*, *r* & polos B, *C* actæ B*t*, *C r* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæſita. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX) verſatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A*, B, P, *C* tranſeunte ; & lineis *R r*, *T t* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Tranſit ergo ſectio Conica per puncta quinq; *A*, B, *C*, *D*, P. *Q. E. D.*



Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*, & circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *A B C*, *A C B*, applicentur crura *B A*, *C A* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum P, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *B L*, *C L* caſu utroq; ſe decuſſant. Agatur recta infinita *M N*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos B, *C*, ea lege ut



crurum

crurum *B A*, *C A*, vel *B D*, *C D* interſectio, quæ jam ſit *d*, Trajectoriam quæſitam *P A D d B* delineabit. Nam punctum *d* per Lem. XXI continget ſectionem Conicam per puncta *B*, *C* tranſeuntem & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Deſcribetur itaq; ſectio Conica tranſiens per puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc rectæ expedite duci poſſunt quæ trajectoriam in punctis quibuſvis datis *B*, *C* tangent. In caſu utrovis accedat punctum *d* ad punctum *C* & recta *C d* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri poſſunt, ut in Corollario ſecundo Lemmatis XIX

Schol.

Conſtructio in caſu priore evadet paulo ſimplicior jungendo *B P*, & in ea ſi opus eſt producta, capiendo *B p* ad *B P* ut eſt *P R* ad *P T*, & per *p* agendo rectam infinitam *p D* ipſi *S P T* parallelam, inq; ea capiendo ſemper *p D* æqualem *P r*, & agendo rectas *B D*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *P T*, *p B* ad *P B*, *p D* ad *P t* in eadem ratione, erunt *p D* & *P r* ſemper æquales. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditiſſime, niſi mavis Curvam, ut in caſu ſecundo, deſcribere Mechanice.

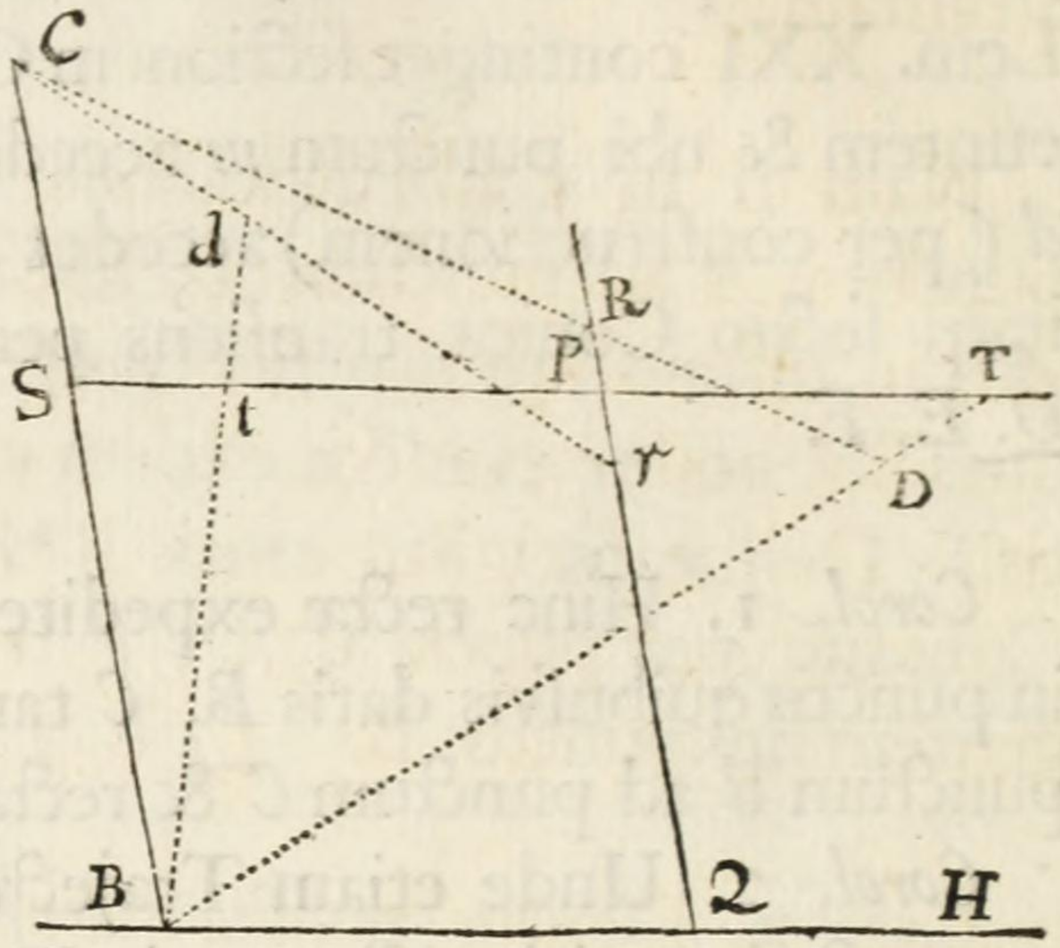
Prop. XXIII. Prob. XV.

Trajectoriam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

Cas. 1. Dentur tangens *H B*, punctum contactus B, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *B C*, & agendo *P S* parallelam

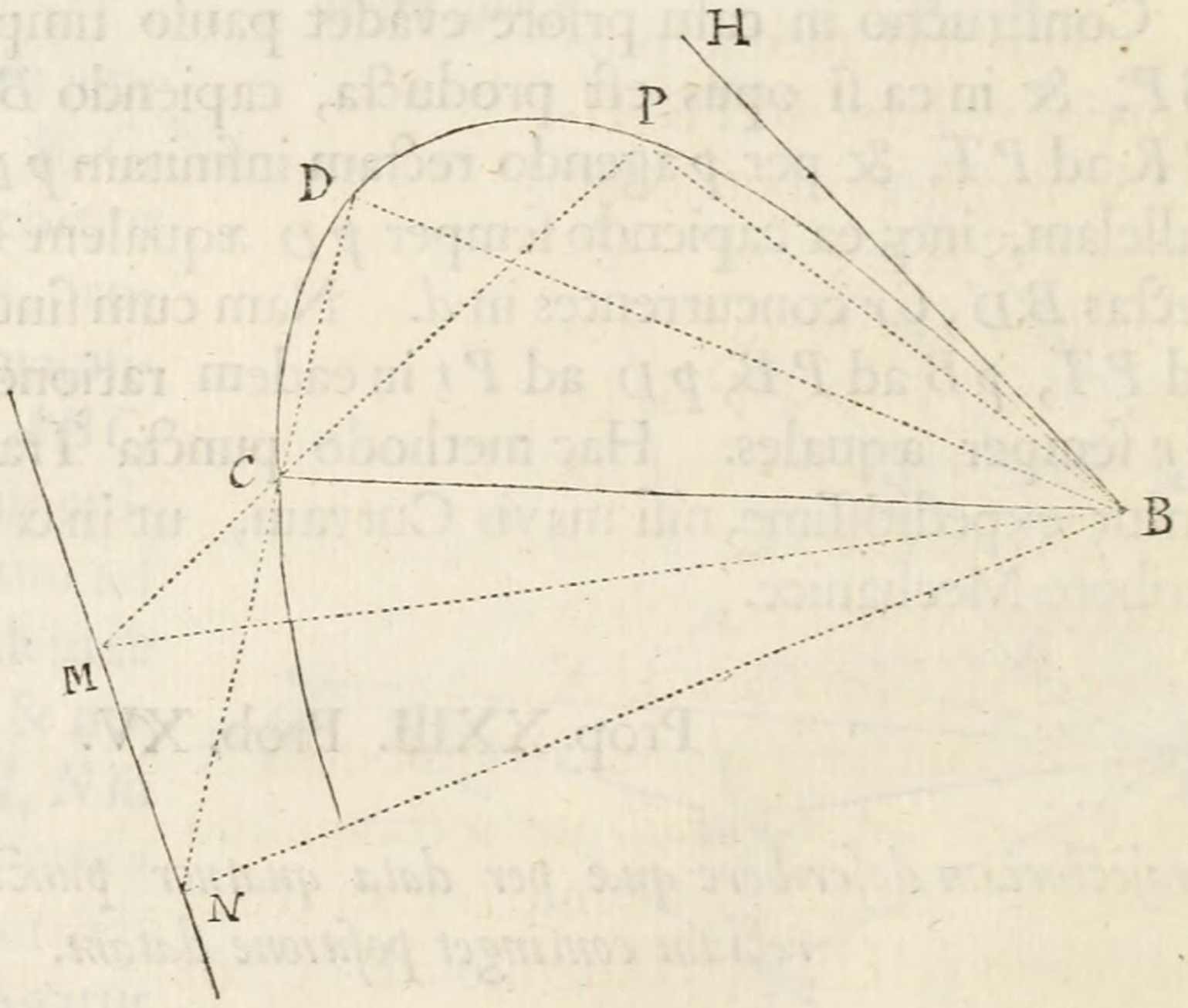
B H

B *H*, & *P Q* parallelam B *C*, comple parallelogrammum B *S P Q*. Age B *D* ſecantem *S P* in *T*, & *C D* ſecantem *P Q* in *R*. Deniq; agendo quamvis *t r* ipſi *T R* parallelam, de *P Q*, *P* S abſcinde *P r*, *P t* ipſis P *R*, P *T* proportionales reſpective; & actarum *C r*, B *t* concurſus *d* (per Corol. 2. Lem. XX) incidet ſemper in Trajectoriam deſcribendam.



Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *C* B *H* circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus *D C* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N* in quibus anguli crus B *C* ſecat radium illum ubi crus alterum B *H* concurrit cum eodem radio

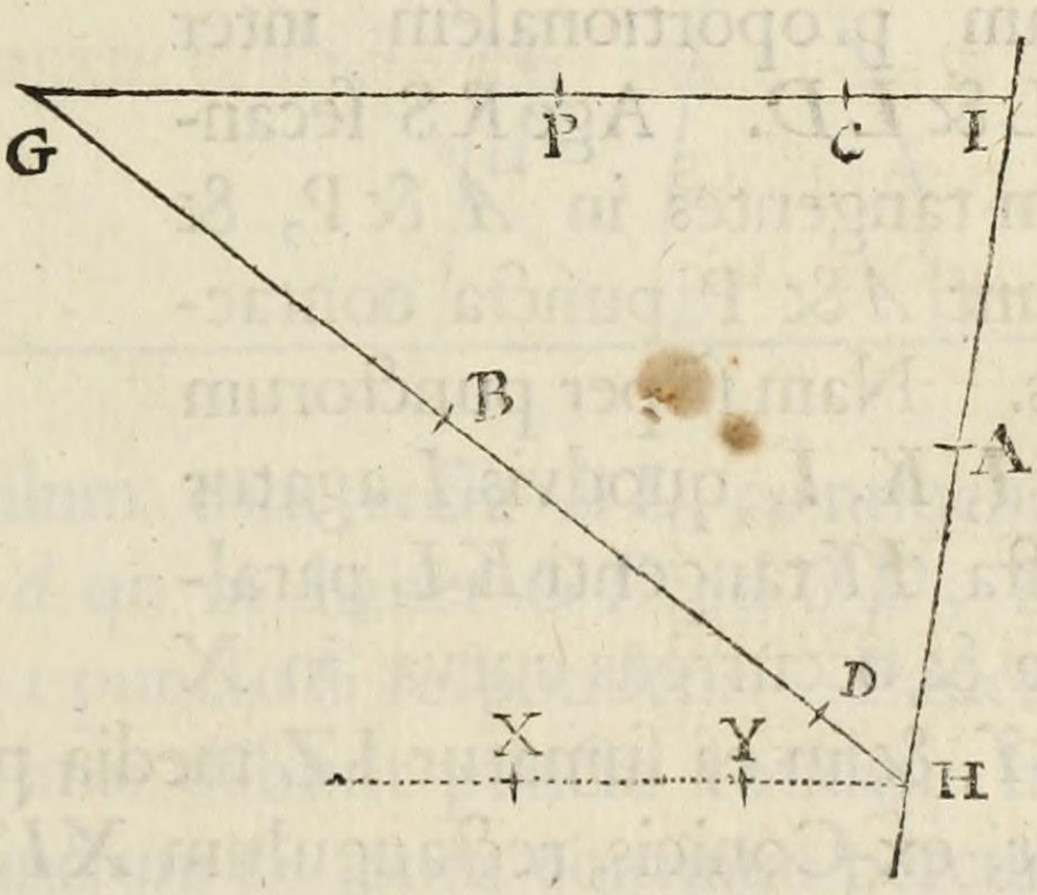


in punctis *D* & P. Deinde ad actam infinitam *M N* concurrant perpetuo radius ille *C P* vel *C D* & anguli crus *C B*, & cru-

cruris alterius *BH* concurſus cum radio delineabit *T*rajectoriam quæſitam.

Nam ſi in conſtructionibus Problematis ſuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo ſuo ſitu fiet tangens *BH*, atq; adeo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hic deſcriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concurſus cum radio ſectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranſeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto B. *Q. E. F.*

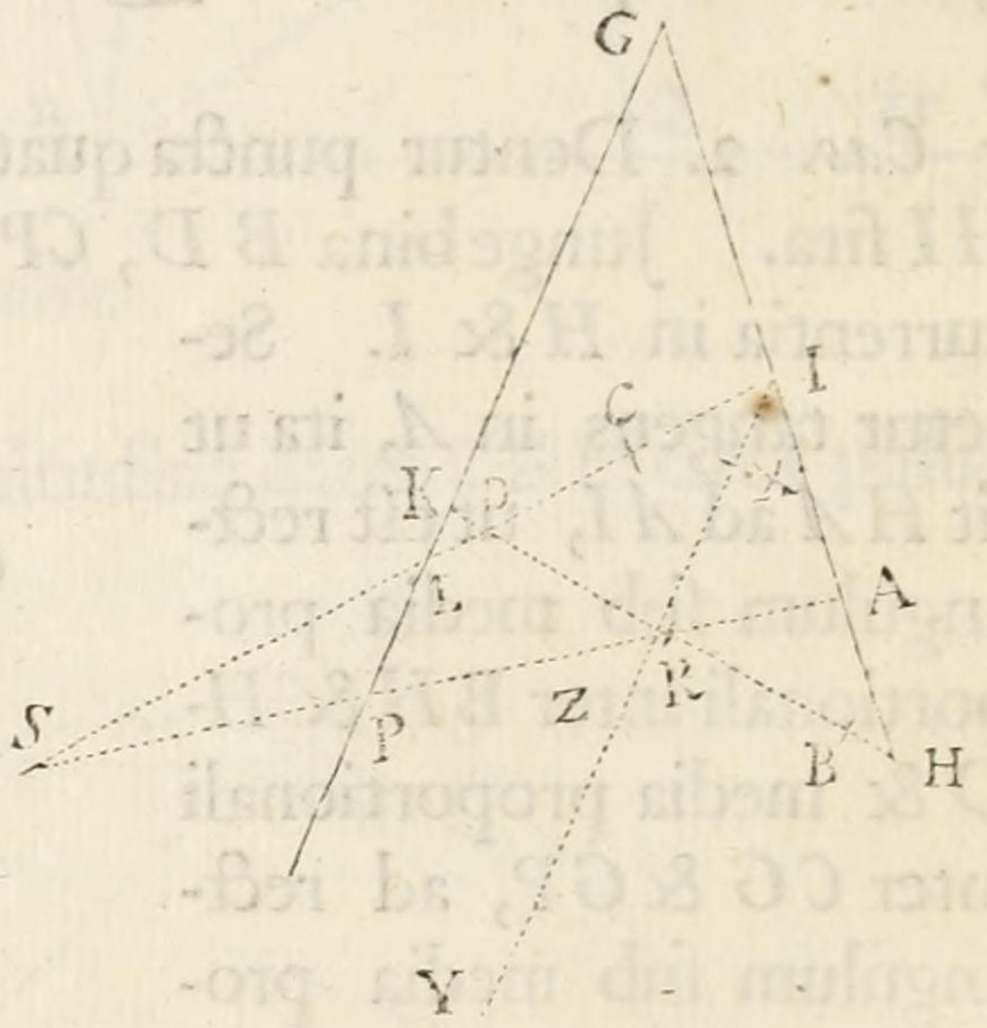
Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, P extra tangentem *HI* ſita. Junge bina *BD*, *CP* concurrentia in *G*, tangentiq; occurrentia in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut ſit *HA* ad *AI*, ut eſt rectangulum ſub media proportionali inter *BH* & *HD* & media proportionali inter *CG* & *GP*, ad rectangulum ſub media proportionali inter *PI* & *IC* & media proportionali inter *DG* & *GB*, & erit *A* punctum contactus. Nam ſi rectæ *PI* parallela *HX* trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) *HA quad.* ad *AI quad.* ut rectangulum *XHY* ad rectangulum *BHD* (ſeu rectangulum *CGP* ad rectangulum *DGB*) & rectangulum *BHD* ad rectangulum *PIC* conjunctim. Invento autem contactus puncto *A*, deſcribetur *T*rajectoria ut in caſu primo. *Q. E. F.* Capi autem poteſt punctum *A* vel inter puncta H & *I*, vel extra; & perinde *T*rajectoria dupliciter deſcribi.



Prop. XXIV. Prob. XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *H I*, *K L* & puncta B, *C*, *D*. Age B *D* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*, & *C* D tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & S, ut sit *H R* ad *K R* ut est media proportionalis inter B *H* & *H D* ad mediam proportionalem inter B *K* & K *D*; & *I* S ad *L* S ut est media proportionalis inter *C I* & *I D* ad mediam proportionalem inter *C L* & *L D*. Age *R* S secantem tangentes in *A* & P, & erunt *A* & P puncta contactus. Nam si per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I* agatur recta *I Υ* tangenti *K L* parallela & occurrens curvæ in *X* & *Υ*, & in ea sumatur I Z media proportionalis inter *I X* & *I Υ*: erit, ex Conicis, rectangulum *X I Υ* (seu *I Z quad.*) ad *L* P *quad.* ut rectangulum *C I* D ad rectangulum *C L* D; id est (per constructionem) ut S *I quad.* ad S *L quad.* atq; adeo *I Z* ad *L* P ut S *I* ad S *L*. Jacent ergo puncta S, P, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *X I Υ* (seu I *Z quad.*) ad I *A quad.* ut *G* P *quad.* ad *G A quad.*, adeoq; I *Z* ad I *A* ut G P ad *G A*. Jacent ergo puncta P, *Z* & *A* in una recta, adeoq; puncta S, P & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, P & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactus *A* & *P* in recta S *R*.



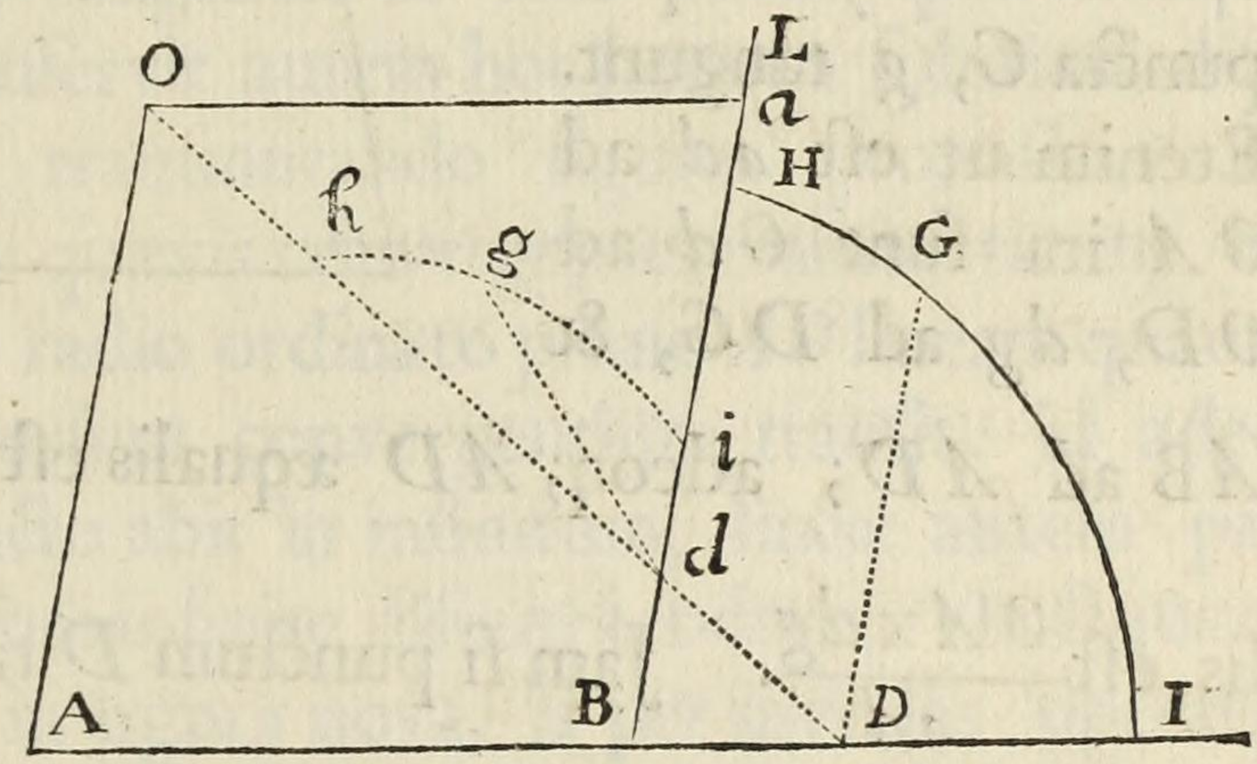
Hisce

Hiſce autem inventis, Trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. *Q. E. F.*

Lemma XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

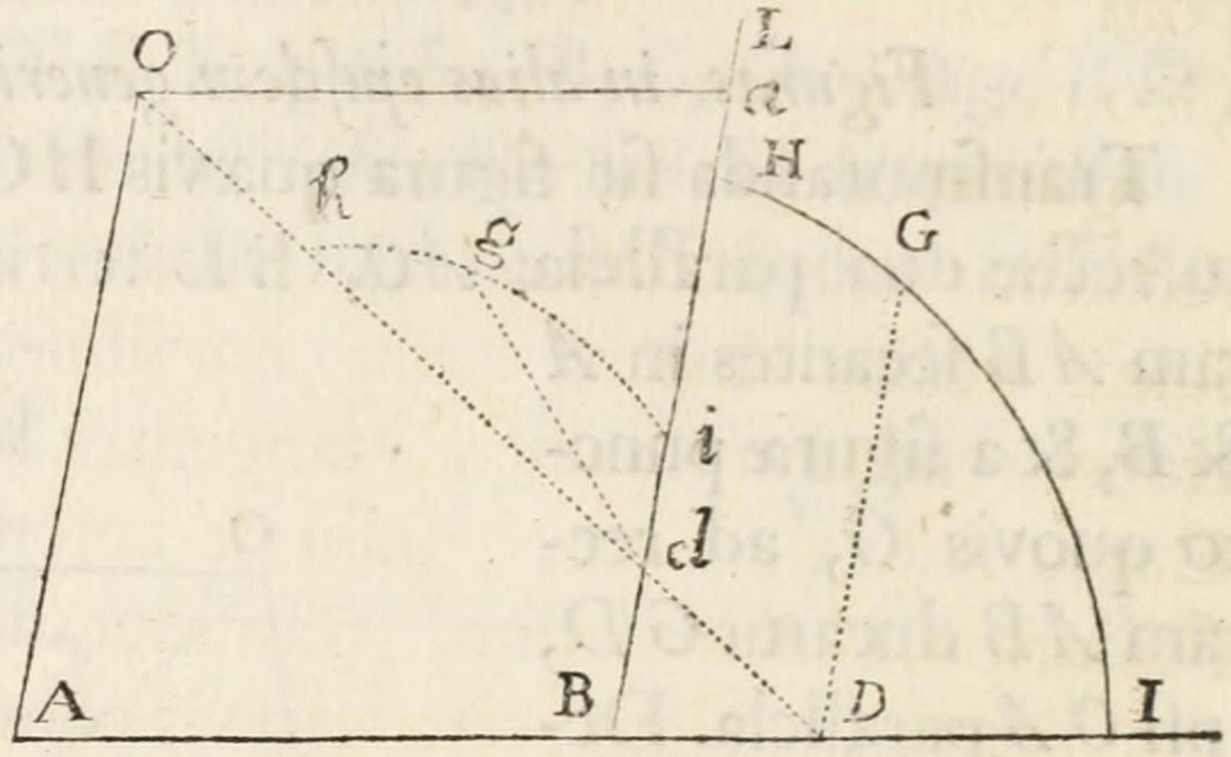
Tranſmutanda ſit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis poſitione datam *AB* ſecantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur *GD*, ipſi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O* in linea *OA* dato ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipſi *BL* occurrens in *d*; & a puncto occurſus erigatur



recta *gd*, datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atq; eam habens rationem ad *Od* quam habet *GD* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *hgi* puncto *G* reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *BD* abſciſſam primam, *Bd* abſciſſam novam; *O* polum, *OD* radium abſcindentem, *OA* radium ordinatum primum & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod ſi punctum *G* tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam.

Si punctum *G* tangit Conicam ſectionem, punctum *g* tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum *G* tangit lineam tertii ordinis Analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum: Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis Analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. Etenim ut eſt *ad* ad *OA* ita ſunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, &



AB ad *AD*; adeoq; *AD* æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$ & *DG* æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum *D* tangit rectam lineam, atq; adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abſciſſam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro *AD*, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro *DG*, producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova *ad* & ordinata noua *dg* ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atq; adeo quæ deſignat lineam rectam. Sin *AD* & *DG* (vel earum alterutra) aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione prima, aſcendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione ſecunda. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ *ad*, *dg* in æquatione ſecunda & *AD*, *DG* in prima aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta *G*, *g* tangunt, ſunt ejuſdem ordinis Analytici.

Dico præterea quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura

figura prima; hæc recta tranſlata tanget lineam curvam in figura nova: & contra. Nam ſi Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur ſimul, evadent curvarum tangentes in figura utraq;. Componi poſſent harum aſſertionum Demonſtrationes more magis Geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum interſectiones transferre, & per eaſdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo *A O* lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit: id adeo quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ ſunt quæ ad punctum infinite diſtans tendunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figura nova, ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur Solutio quæſita.

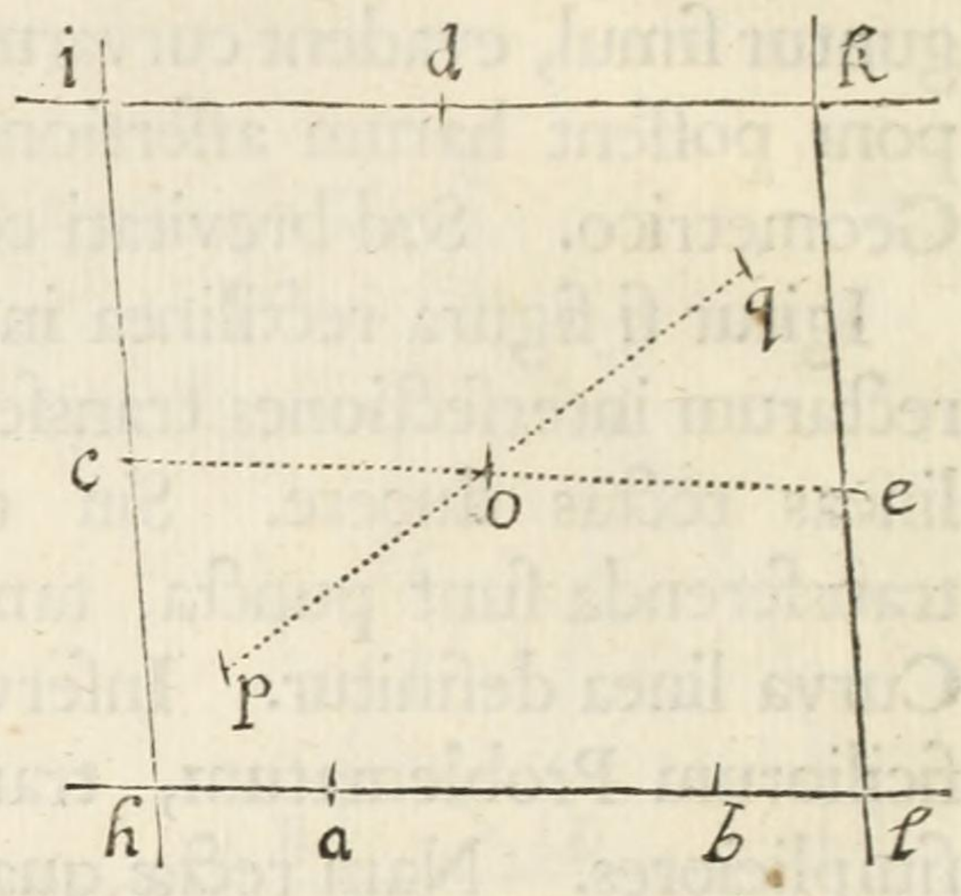
Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione Solidorum problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet unum earum in circulum. Recta item & ſectio Conica in conſtructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam deſcribere quæ per data duo puncta tranſibit & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data

data tranſit, age rectam infinitam; eaq; adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d* & *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: Et erunt *c*, *d*, *e* puncta contactus.



Etenim, ex Conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad *alb* rectangulum in eadem ratione, & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd* & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in dimidiata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactus *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per caſum primum Problematis XIV, deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.

Prop.

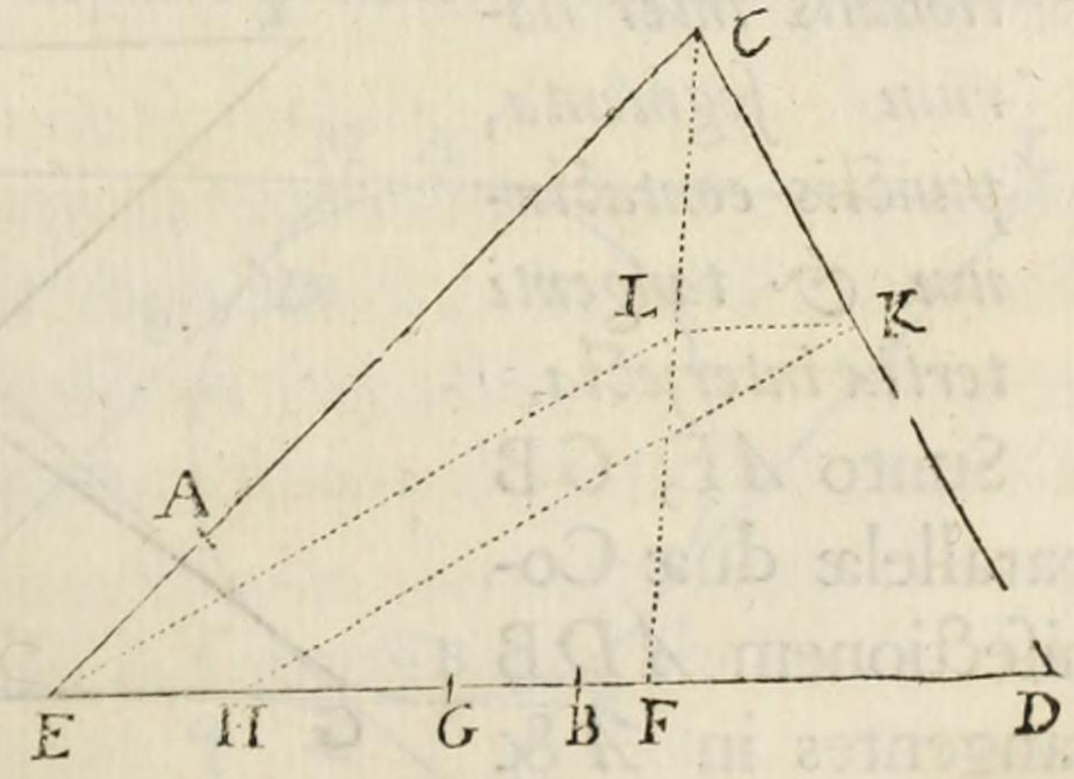
Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ,quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *h i* & *k l*, *i k* & *h l* continentes parallelogrammum *h i k l*. Sitq; *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *p q*, & existente *O q* æquali *O p*, erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q. E. F.*

Lemma XXIII.

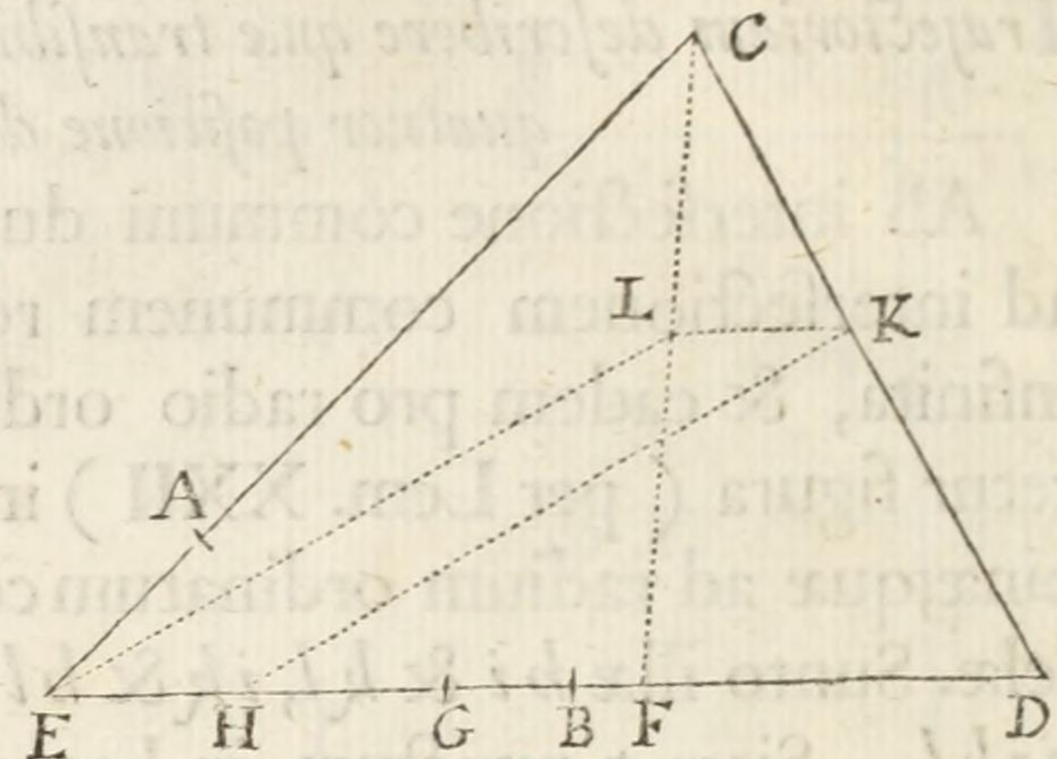
Si rectæ duæ positione datæ A-C, B D ad data puncta A, B terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta C D, qua puncta indeterminata C, D junguntur, secetur in ratione data in K: dico quod punctum K locabitur in recta positione data.



Concurrant enim rectæ *A C*, *B D* in *E*, & in *B E* capiatur *B G* ad *A E* ut est *B D* ad *A C*, sitq; *F D* æqualis *E G*, & erit *E C* ad

G D,

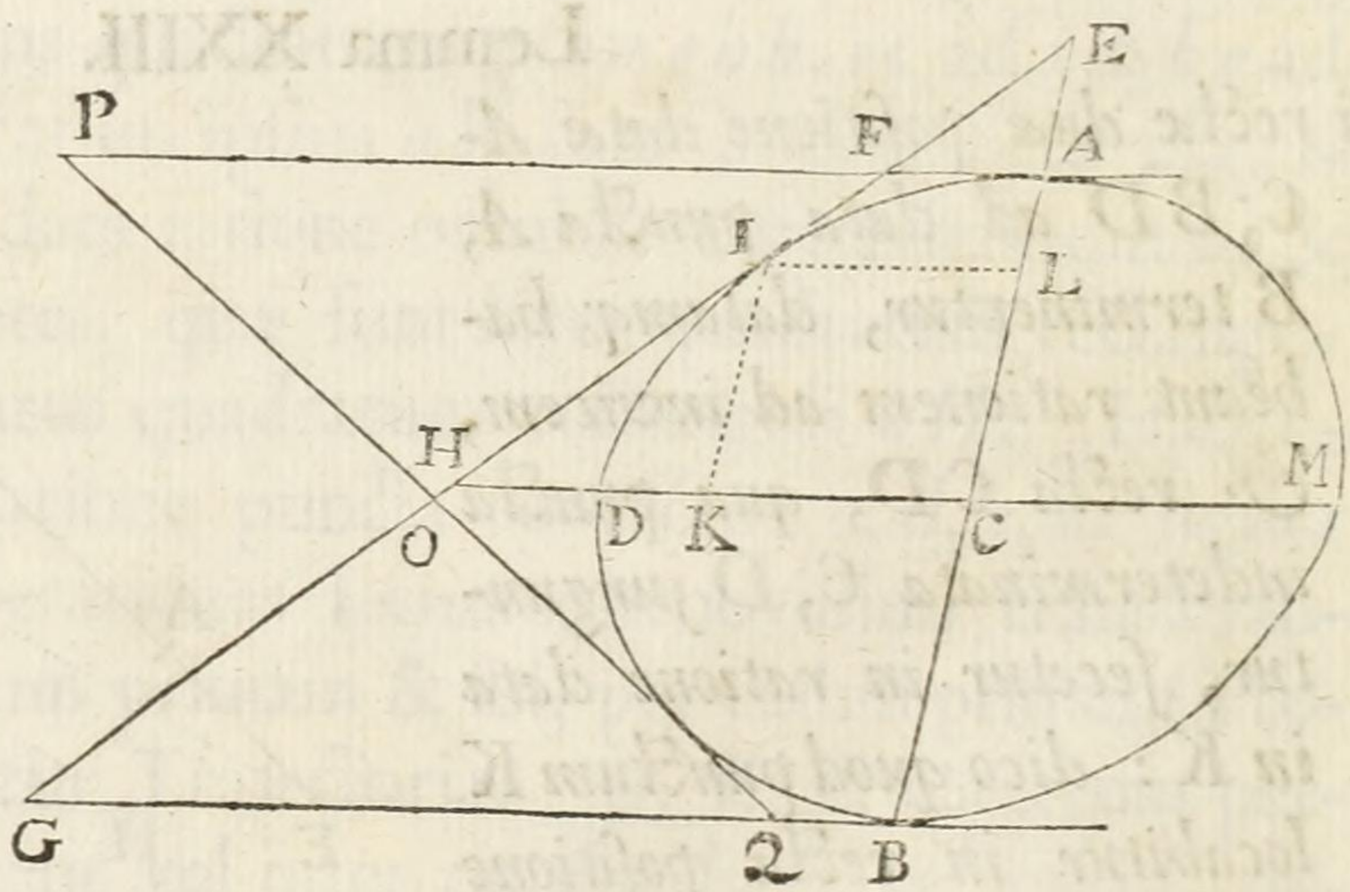
G D, hoc eſt ad *E F* ut *A C* ad *B D*, adeoq; in ratione data, & propterea dabitur ſpecie ttiangulum *E F C*. Secetur *C F* in *L* in ratione *C K* ad *C D*, & dabitur etiam ſpecie triangulum *E F L*, proindeq; punctum *L* locabitur in recta E *L* poſitione data. Junge *L K*, & ob datam *F D* & datam rationem *L K* ad *F D*, dabitur *L K*. Huic æqualis capiatur *E H*, & erit E *L K H* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi latere poſitione dato *H K*. *Q. E. D.*



Lemma. XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunq; coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *A F*, *G B* parallelæ duæ Coniſectionem *A D B* tangentes in *A* & *B*; E *F* recta tertia Coniſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; ſitq; *C D* ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *A F*, *C D*, B *G* ſunt continue proportionales. Nam



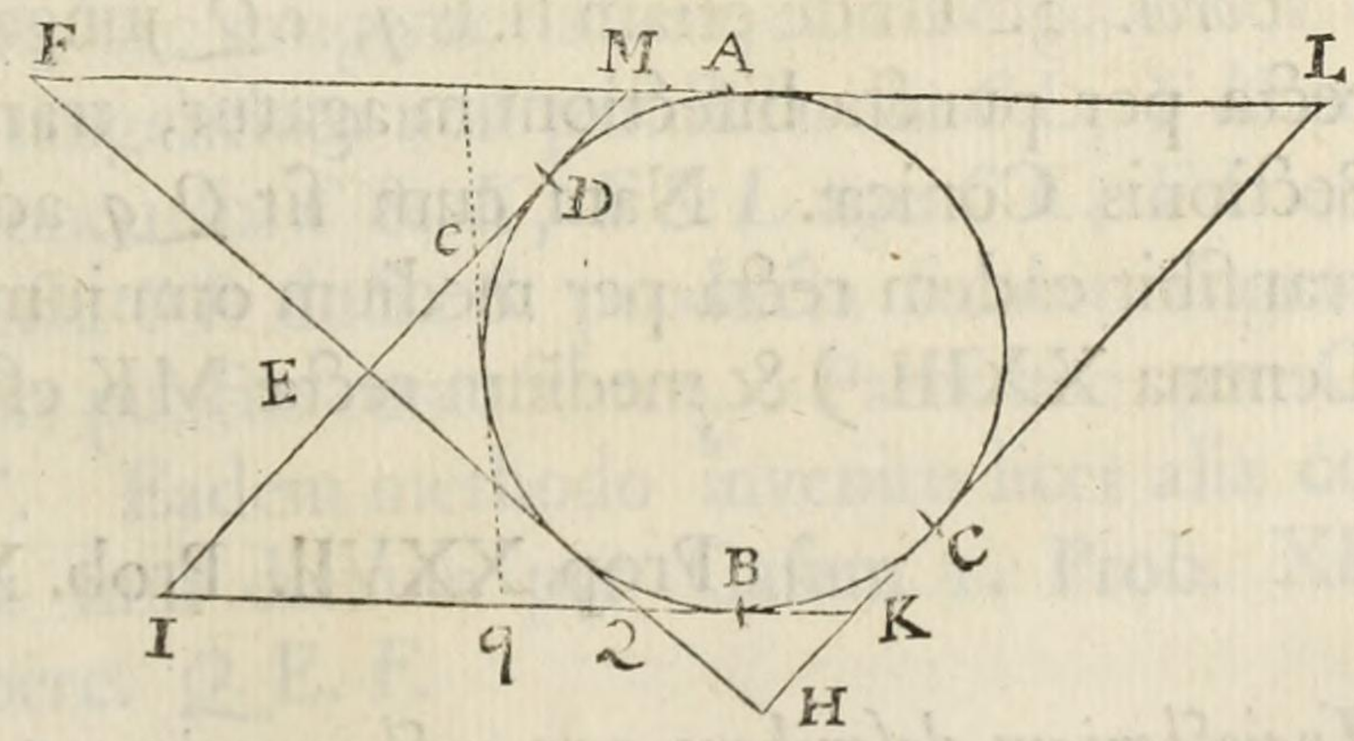
Nam ſi diametri conjugatæ *A*B, *D M* tangenti *FG* occurrant in *E* & H, ſeq; mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit ex natura ſectionum Conicarum, ut E*C* ad *CA* ita *CA* ad *LC*, & ita diviſim E*C* − *CA* ad *CA* − *CL* ſeu E*A* ad *AL*, & compoſite E*A* ad E*A* + *AL* ſeu E*L* ut E*C* ad E*C* + *CA* ſeu E B; adeoq; (ob ſimilitudinem triangulorum E*A*F, E*L*I, ECH, EBG) *AF* ad L I ut *CH* ad B G. Eſt itidem ex natura ſectionum Conicarum L I ſeu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*, atq; adeo ex æquo perturbate *AF* ad *CD* ut *CD* ad B G. *Q.* E. *D.*

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, B G occurrant in *F* & *G*, P & *Q*, ſeq; mutuo ſecent in *O*, erit (ex æquo perturbate) *A*F ad B *Q* ut A P ad B G, & diviſim ut F P ad G *Q*, atq; adeo ut F *O* ad *O* G.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ P G, F *Q* per puncta P & G, F & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum A, B tranſeuntem.

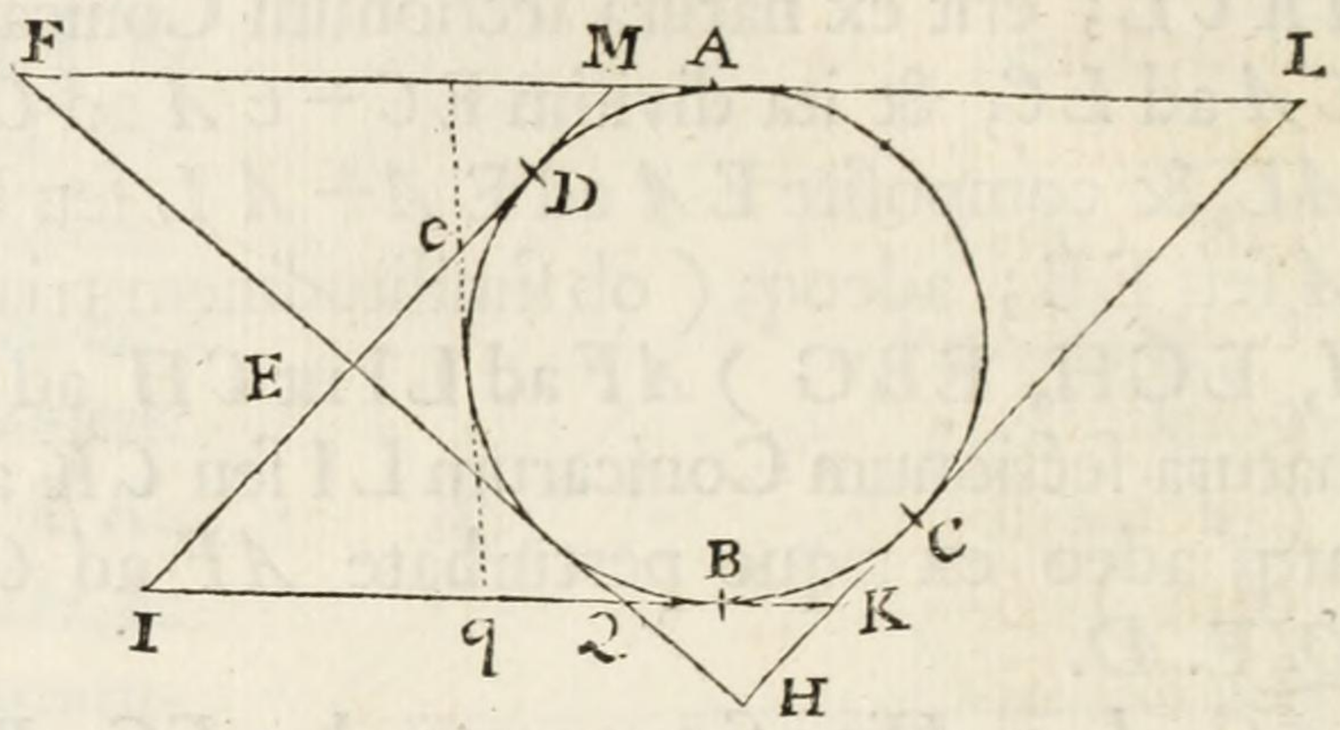
Lemma XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunq; Conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa unius lateris ſit ad latus illud, ut pars lateris contermini inter punctum contactus & latus tertium, ad abſciſſam lateris hujus contermini.



Tangant parallelogrammi *MIKL* latera quatuor *ML*, I*K*, *KL*.

KL, MI ſectionem Conicam in *A*, B, *C*, *D*, & ſecet tangens quinta F *Q* hæc latera in F, *Q*, *H* & E: dico quod ſit ME ad MI ut BK ad *K Q*, & *K H* ad KL ut AM ad MF. Nam per Corollarium Lemmatis ſuperioris, eſt ME ad EI ut AM ſeu BK ad BQ, & componendo ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK ſeu AM ad AF, & dividendo KH ad KL ut AM ad MF. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi parallelogrammum IK*L*M datur, dabitur rectangulum KQ x ME, ut & huic æquale rectangulum KH x MF. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens *e q* tangentibus KI, MI occurrens in *e* & *q*, rectangulum KQ x ME æquabitur rectangulo K*q* x M*e*, eritq, KQ ad M*e* ut K*q* ad ME, & diviſim ut *Q q* ad E*e*.

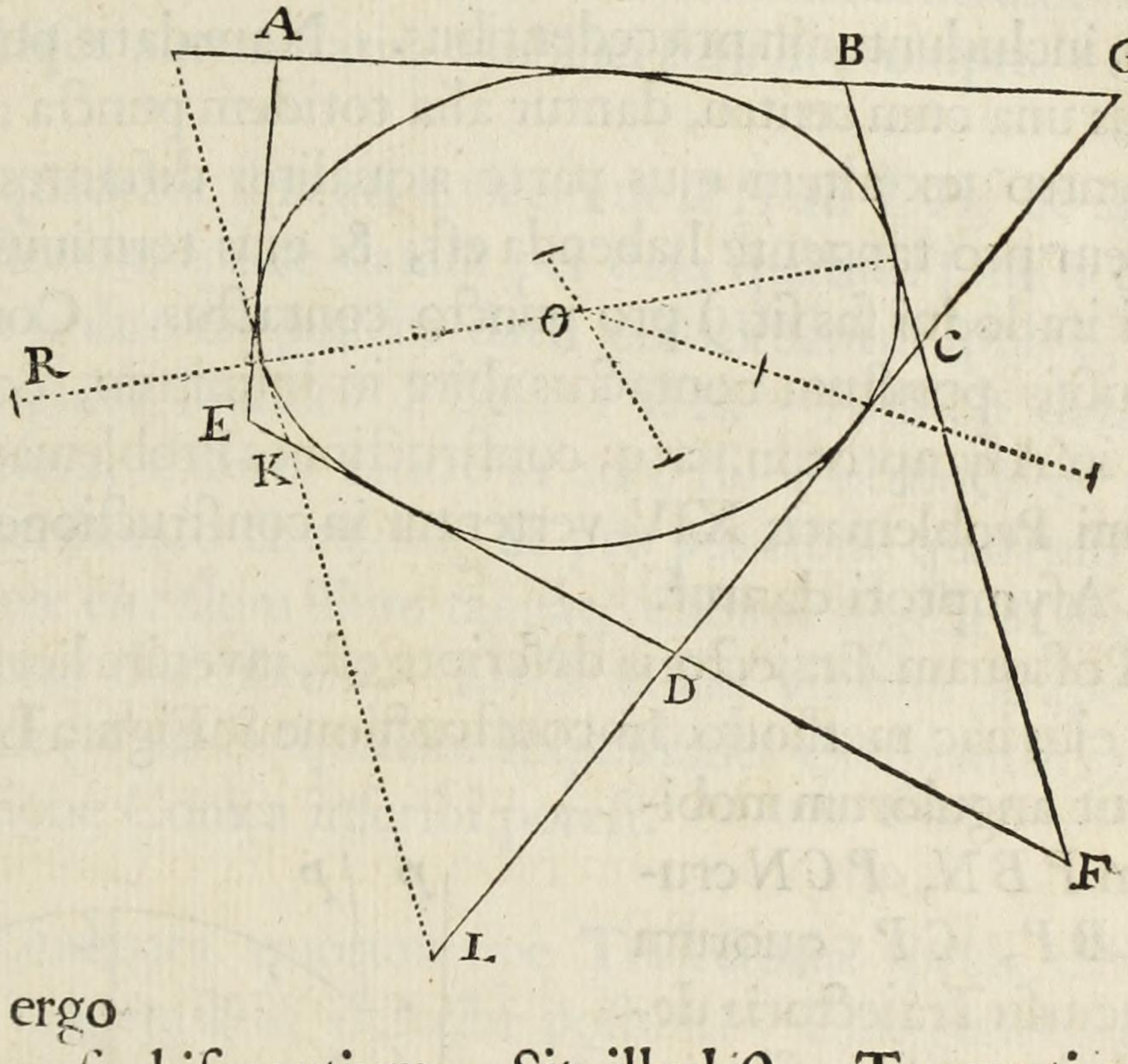
Corol. 3. Unde etiam ſi E*q*, *e Q* jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum ſit *Q q* ad E*e* ut KQ ad *Me*, tranſibit eadem recta per medium omnium E*q*, *e Q*, *MK*; (per Lemma XXIII) & medium rectæ MK eſt centrum Sectionis.

Prop. XXVII. Prob. XIX.

Trajectoriam deſcribere quæ rectas quinq; poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, *EA*. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ *AB*, FE,

F E diagonales *A F*, *B* E biſeca, & (per Cor. 3. *L*em. XXV) recta per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum Trajectoriæ. *R*urſus figuræ quadrilateræ *B G D* F, ſub alijs quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *B D*, *G F* biſeca, & recta per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum ſectionis. Dabitur ergo



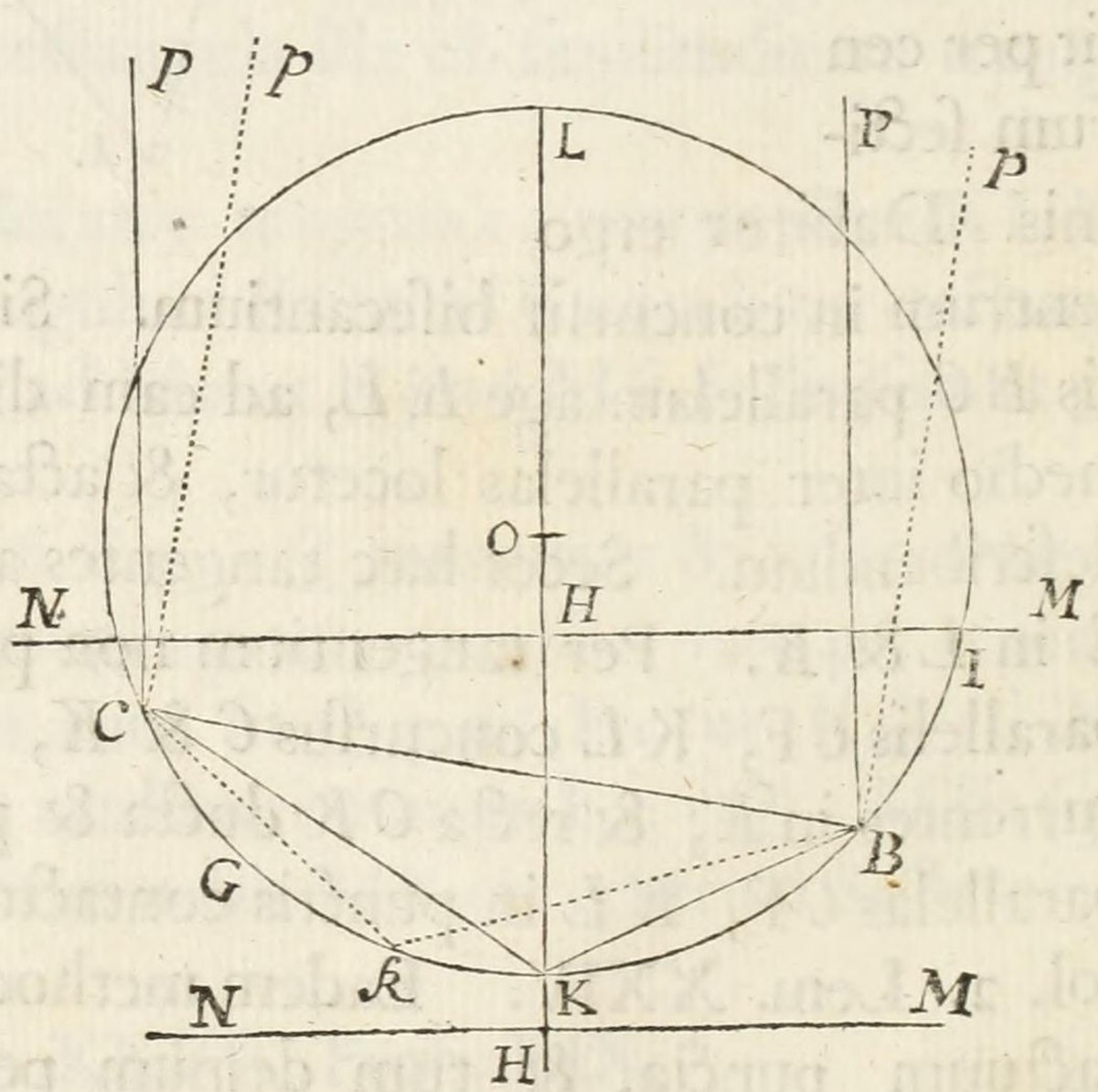
centrum in concurſu biſecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *B C* parallelam age *K L*, ad eam diſtantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *K L* tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas *C D*, F *D*-E in *L* & *K*. Per tangentium non parallelarum *C L*, F *K* cum parallelis *C* F, K *L* concurſus *C* & *K*, F & *L* age *C K*, F *L* concurrentes in *R*, & recta *O R* ducta & producta ſecabit tangentes parallelas *C* F, *K L* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Caſum 1. Prob. XIV. Trajectoriam deſcribere. *Q.* E. *F.*

Scho-

Schol.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel *Asymptoti*, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæq; tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atq; constructiones Problematis XV & Casus primi Problematis XIV vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & Figura Lemmatis *XXI*, fac ut angulorum mobi-



lium *P B N*, *P C N* crura *B P*, *C P* quorum concursu Trajectoria describebatur sint sibi invicem parallela, eumq; servantia situm revolvantur circa polos suos *B*, *C* in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura *C N*, *B N*, concursu suo *K* vel *k*, circulum *I B K G C*. Sit circuli hujus centrum *O*.

Ab hoc centro ad Regulam *M N*, ad quam altera illa crura *C N*, *B N* interea concurrebant dum Trajectoria describebatur, demitte normalem *O H* circulo occurrentem in K & *L*. Et ubi cru-

ra

ra illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum istud *K* quod Regulæ propius est, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli *C*, B, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PBK*. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, centroq; *O* & intervallo *OH* describendo circulum, & per punctum quartum agendo rectam quæ circulum illum tangat, dabitur regula *MN* cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione Conica inscribi potest.

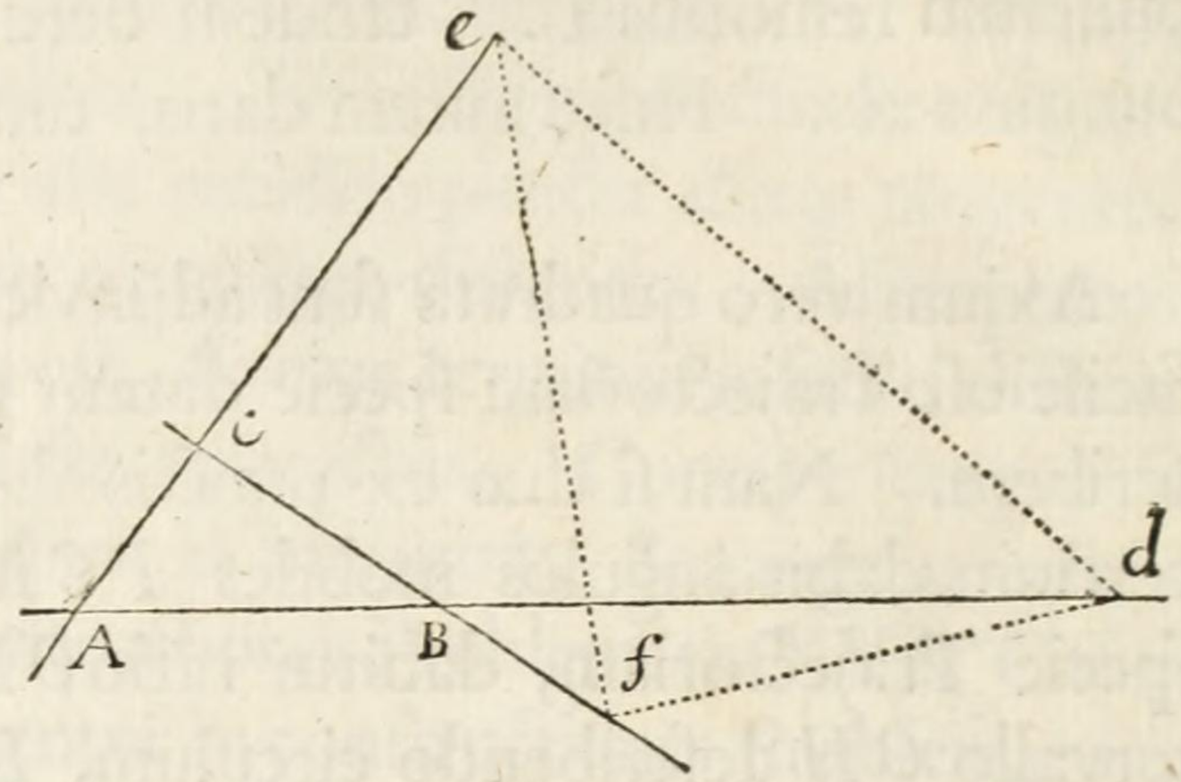
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ' datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atq; axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

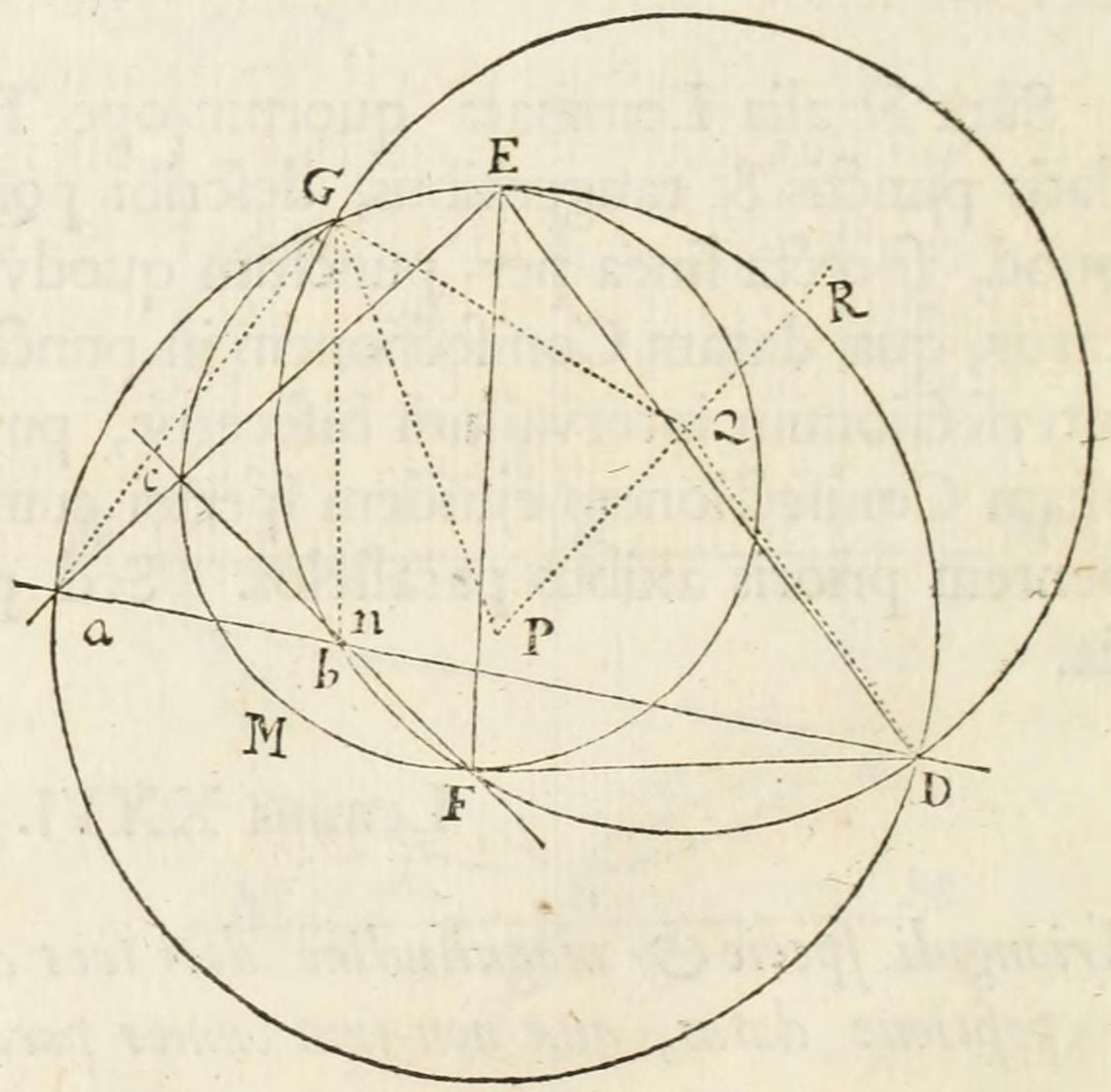
Lemma XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, an-

angulus E lineam *AC*,& angulus F lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta *DRE*, *DGF*, E*M*F,quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales reſpective. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, EF ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BAC-B*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ E*M*FE eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant: deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos. Secent circuli duo priores ſe mutuo in *G*, ſintq; centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut eſt *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* ſecans circulum ſecundum *DFG* in *b*, tum *a*E ſecans circulum tertium *GEc* in *c*. Et compleatur figura *abcDEF* ſimilis & æqualis figuræ *ABCdef*. Dico factum.





Agatur enim F*c* ipſi *aD* occurrens in *n*. Jungantur *aG*, *bG*,

b G, *P D*, *Q D* & producatur P *Q* ad *R*. Ex conſtructione eſt angulus E *a D* æqualis angulo *C A B*; & angulus E *c* F æqualis angulo *A C B*, adeoq; triangulum *a n c* triangulo *A B C* æquiangulum. Ergo angulus *a n c* ſeu F *n D* angulo *A B C*, adeoq; angulo F *b D* æqualis eſt, & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *G* P *Q*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *G*-P *D*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *G a D*; & angulus G-*Q R*, qui dimidius eſt complementi anguli ad centrum G *Q D*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam G *b D*, adeoq; eorum complementa P *Q* G, *a b* G æquantur, ſuntq; ideo triangula G P *Q*, G *a b* ſimilia, & G *a* eſt ad *a b* ut G P ad P *Q*; id eſt(ex conſtructione) ut G *a* ad *A* B. Æquantur itaq; *a b* & *A B*, & propterea triangula *a b c*, A B *C*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde cum tangant inſuper trianguli *D* E F anguli *D*, *E*, *F* trianguli *a b c* latera *a b*, *a c*, *b c* reſpective, compleri poteſt figura *A B C d e f* figuræ *a b c D E F* ſimilis & æqualis, atq; eam complendo ſolvetur Problema. *Q. E F.*

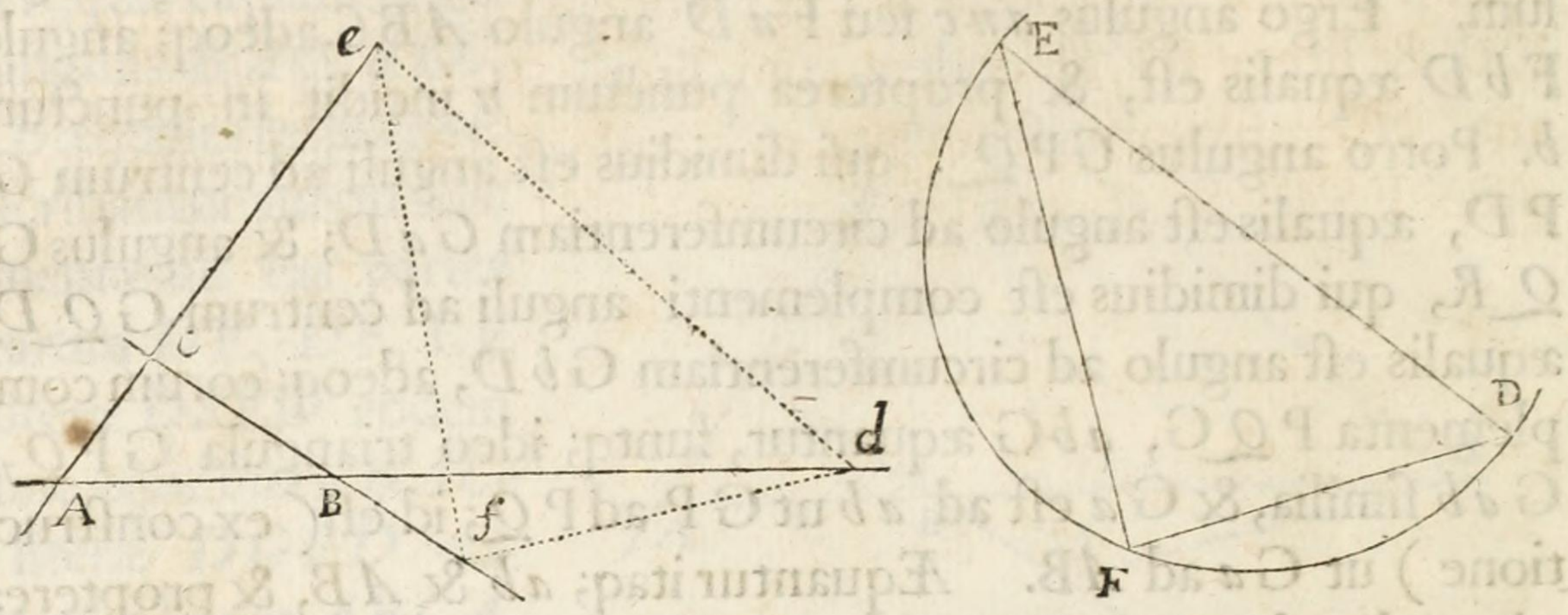
Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe Triangulum *D E* F, puncto *D* ad latus *E F* accedente, & lateribus *D* E, *D F* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *D* E, rectis poſitione datis *A B*, *A C*, & pars data *D F* rectis poſitione datis *A B*, *B C* interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

Prop. XXVIII. Prob. XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit Trajectoria quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ *D E F*, quæq; a rectis tribus *A B*, *A C*, *B C* poſitione datis, in

partes datis hujus partibus *D* E & E *F* ſimiles & æquales ſecabitur. Age rectas *D* E, E *F*, *D F*, & trianguli hujus *D* E *F* pone angu-



los *D*, E, *F* ad rectas illas poſitione datas: (per *Lem.* XXVI) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam curvæ *D E F* ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

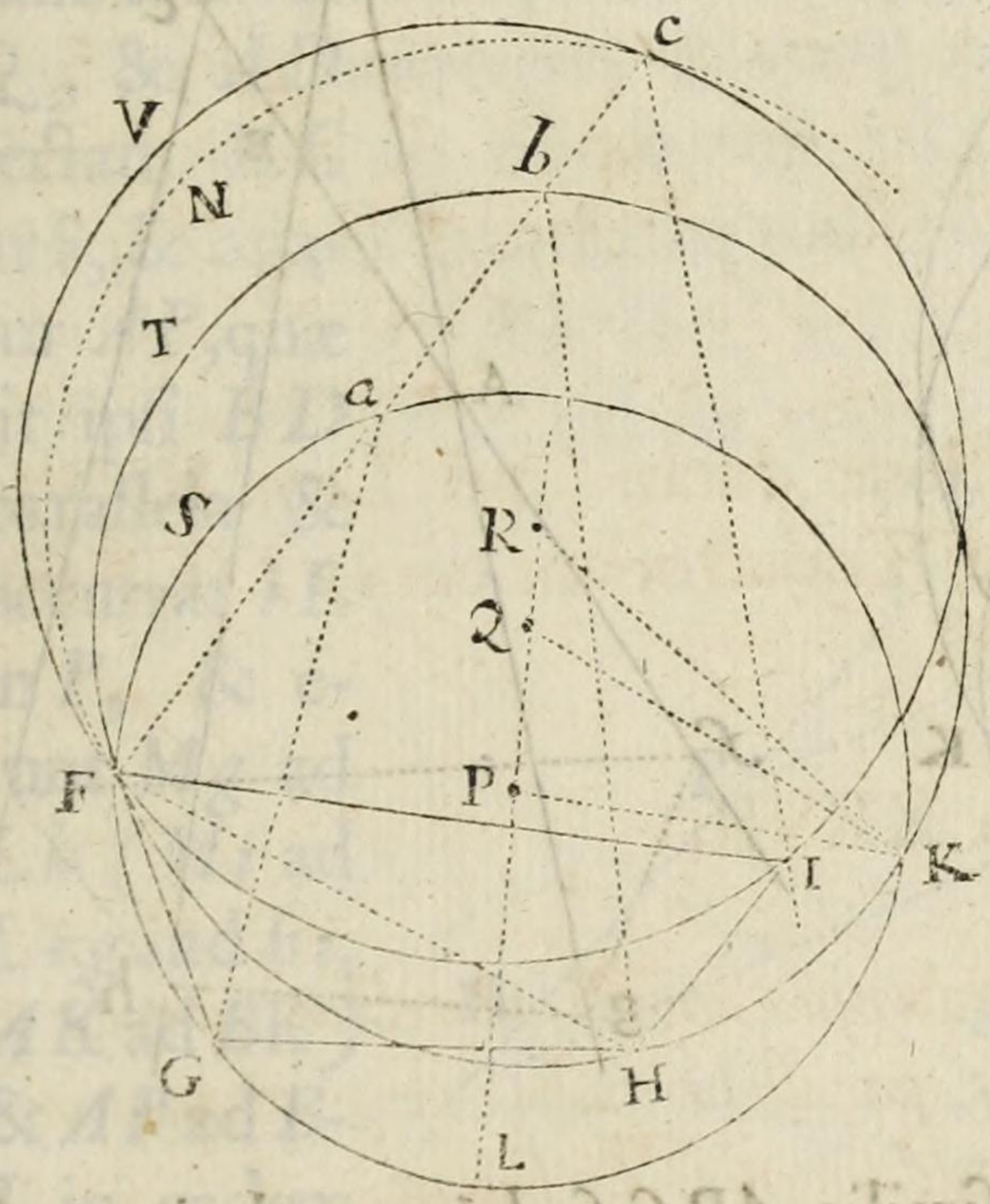
Lemma XXVII.

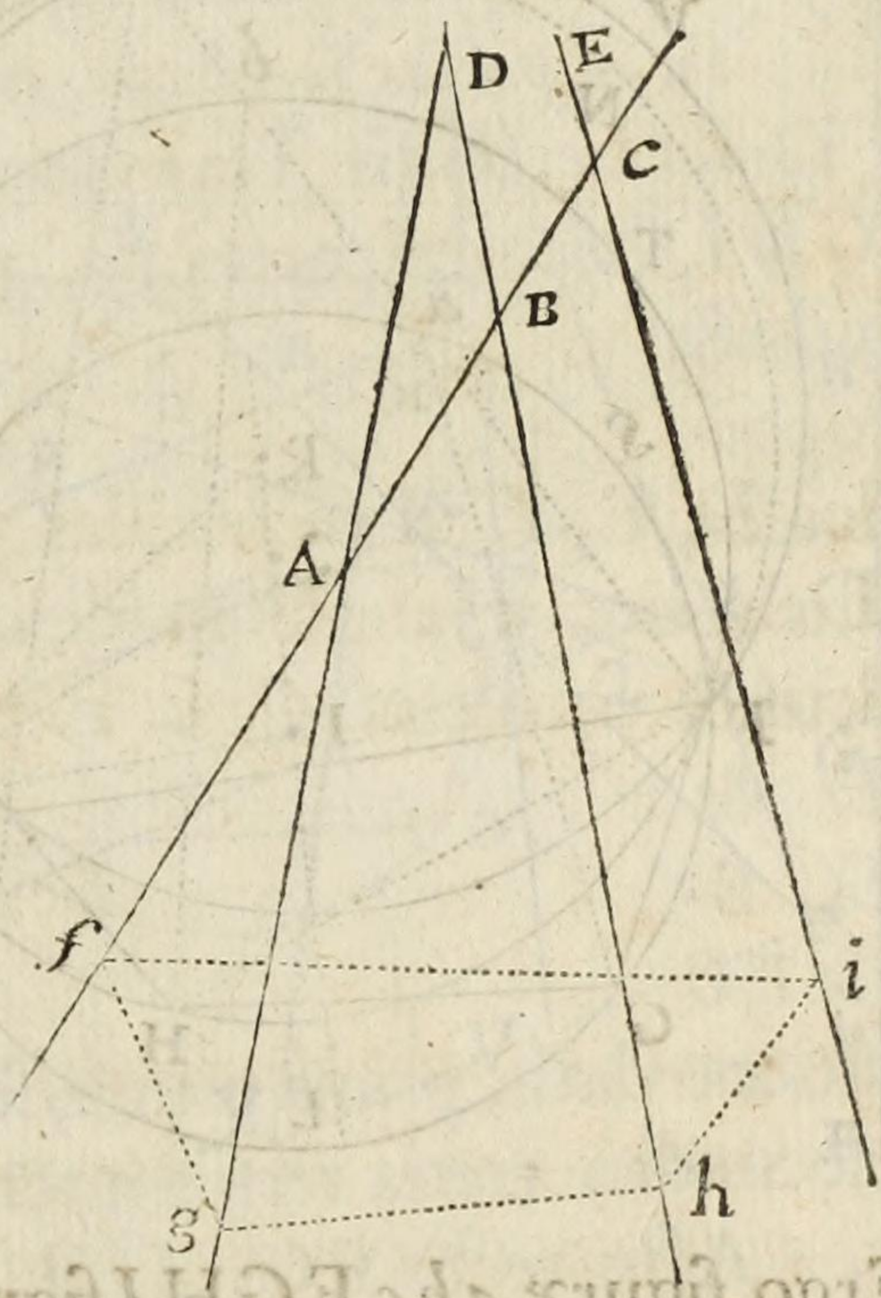
Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas (quæ neq; omnes parallelæ ſunt, neq; ad commune punctum convergunt) ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *A B C*, *A D*, *B D*, *C* E, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *f g h i* quod ſit Trapezio *F G H I* ſimile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *A B C*, cæteriq; anguli *g*, *h*, *i* cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales tangant cæteras lineas *A D*, *B D*, *C* E reſpective. Jungatur *F H*, & ſuper *F G*, *F H*, *F I* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta F S G, F *T* H, F *V I*; quorum primum F S *G* capiat angulum æqualem angulo *B A D*, ſecundum F *T H* capiat angulum æqualem angulo *C* B E; ac tertium F *V I* capiat angulum æqualem angulo *A C*-

E.

E. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum F *G*, F *H*, F *I*, ut literarum F S *G* F idem ſit ordo circularis qui literarum B *A D* B, utq; literæ F *T H* F eodem ordine cum literis *C* B-E *C*, & literæ F *V I* F eodem cum literis *A C* E *A* in orbem rede-ant. Compleantur ſegmenta in circulos, ſitq; *P* centrum circuli primi F S *G*, & *Q* centrum ſecundi F *T H*. Jungatur & utrinq;

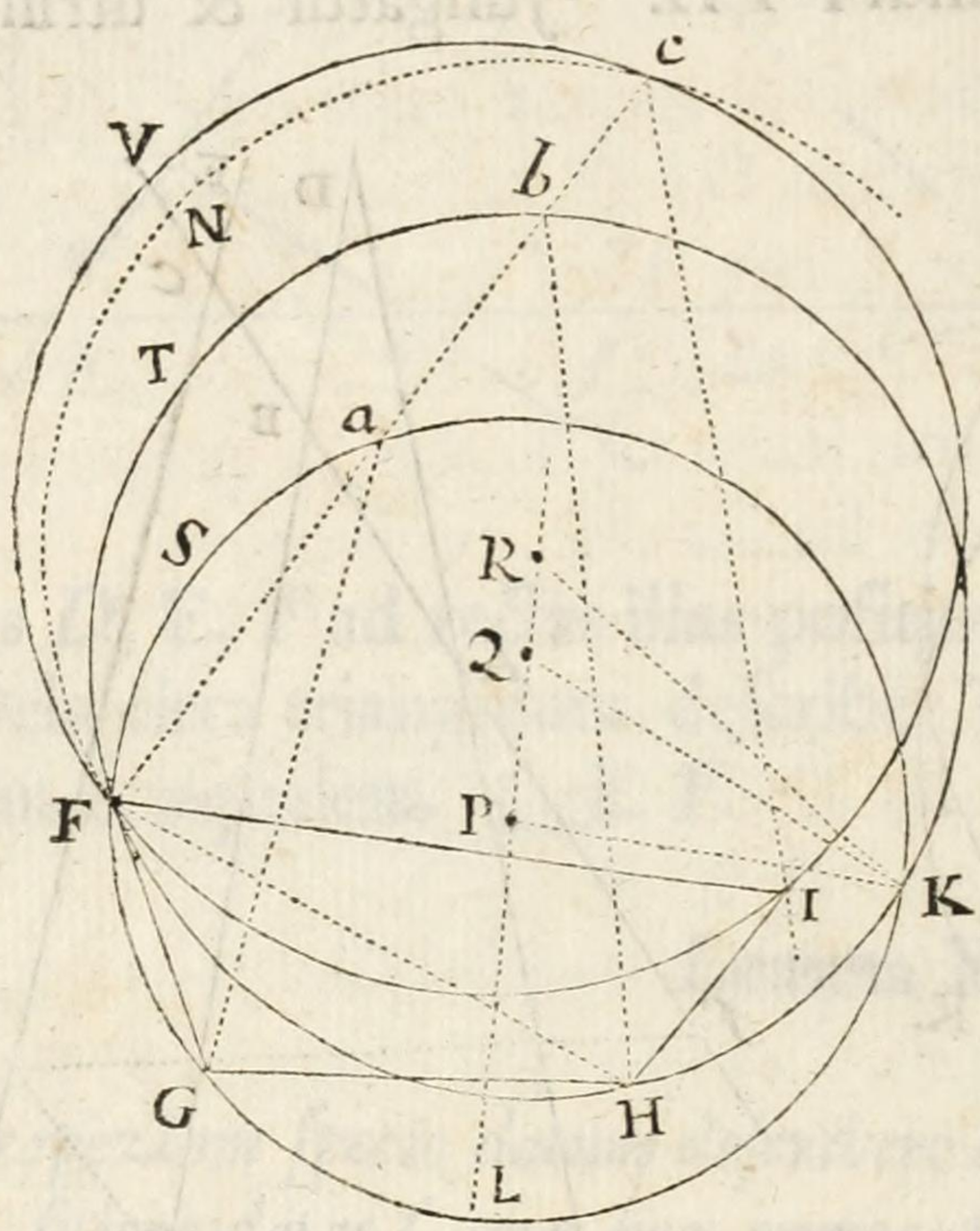


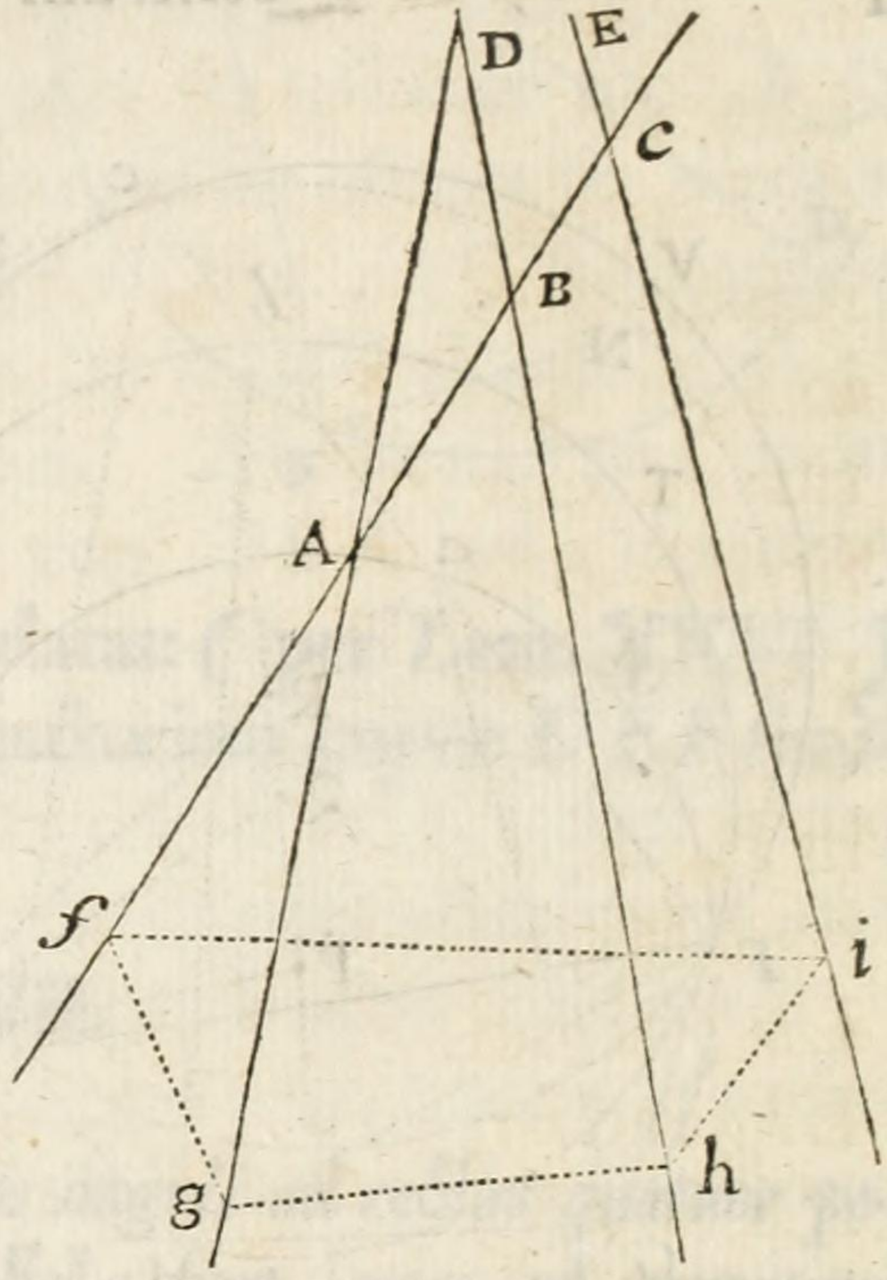


producatur *P Q*,& in ea capiatur *Q R* in ea ratione ad *P Q* quam habet B *C* ad *A* B. Capiatur autem *Q R* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q* , *R* idem ſit ordo circularis atq; literarum *A*, B, *C*: centroq; *R* & intervallo *R* F deſcribatur circulus quartus F-*N c* ſecans circulum tertium F *V I* in *c*. Jungatur F *c* ſecans circulum primum in *a* & ſecundum in *b*. Agantur *a* G, *b H*, *c I*, & figuræ *a b c* F G *H I* ſimilis conſtituatur figura *A* B *C f g h i*: Eritq; Trapezium *f g h i* illud ipſum quod conſtituere oportuit.

Secent enim circuli duo primi F S G, F *I H* ſe mutuo in K. Jungantur *P K*, *Q K*, *R K*, *a K*, *b K*, *c K* & producatur *Q P* ad

L. Anguli ad circumferentias F *a* K, F *b K*, F *c K* ſunt ſemiſſes angulorum F *P* K, F *Q K*, F *R K* ad centra, adeoq; angulorum illorum dimidiis *L P K*, *L Q K*, *L R* K æquales. Eſt ergo figura *P Q R K* figuræ *a b c* K æquiangula & ſimilis, & propterea *a b* eſt ad *b c* ut *P Q* ad *Q R*, id eſt ut *A* B ad B *C*. Angulis inſuper F-*a G*, *F b* H, F *c I* æquantur *f Ag*, *f* B *h*, *f C i* per conſtructionem.





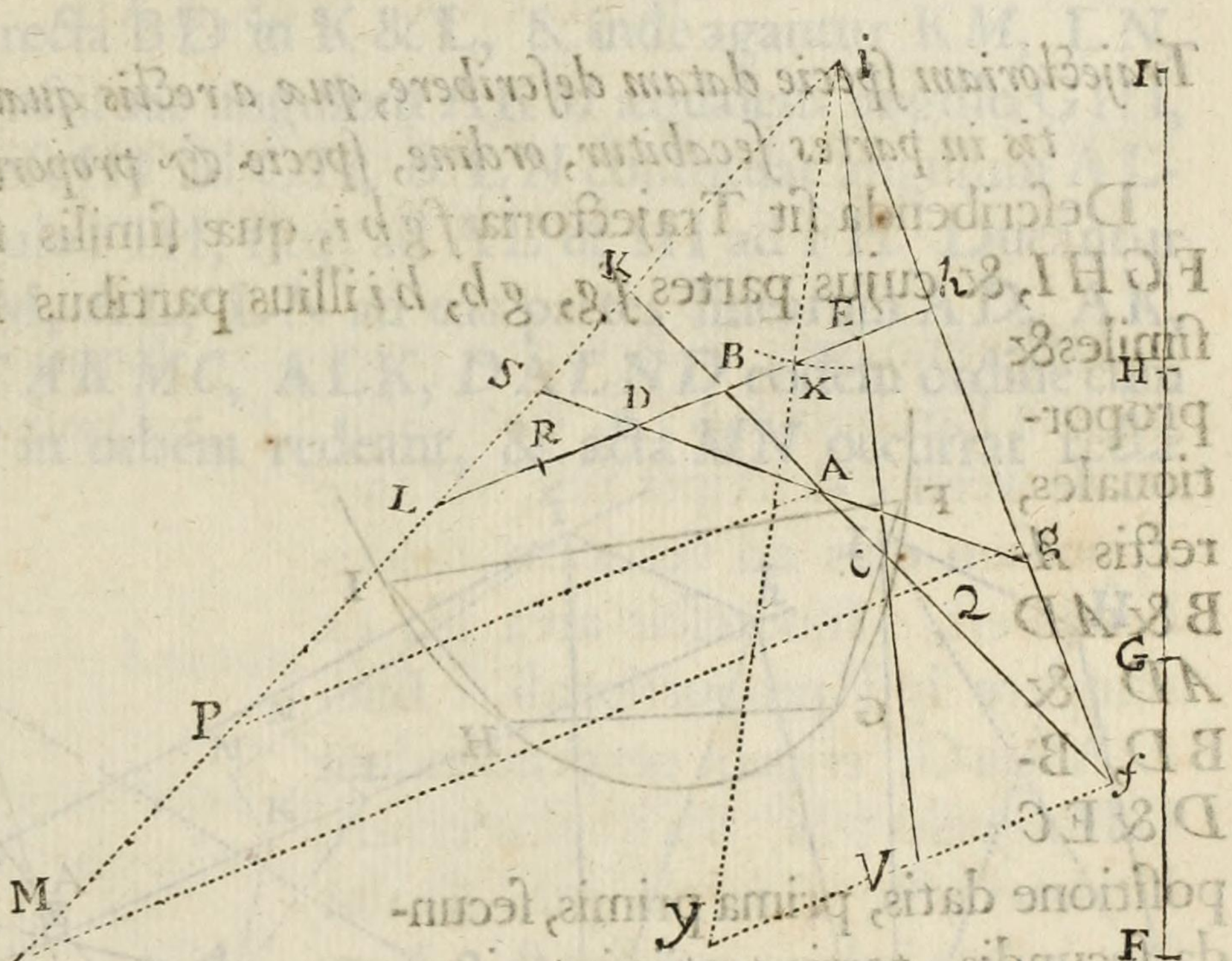
Ergo figuræ *a b c* F *G* H *I* figura ſimilis *A* B *C f g h i* compleri poteſt. Quo facto Trapezium *f g h i* conſtituetur ſimile Trapezio F *G HI* & angulis ſuis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *AB*, *AD*, *B D*, *C*E. *Q*.E.F.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli F *G* H, *G H I* uſq; eo, ut rectæ F *G*, *G H*, *H I* in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo Proble-ma, ducetur recta *f g h i* cujus partes *f g*, *g h*, *h i*, rectis quatuor poſitione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *C*E interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ F *G*, *G H*, *H I*, eundemq; ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

Pro-

Producantur *AB* ad *K*,& *BD* ad *L*,ut ſit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur K*L* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut ſit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipſi *LB* parallela rectæq; *AD* occurrens in *g*, tum *gi* ſecans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam K*L* in S, & agatur *AP*,quæ ſit ipſi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *Mg* ad *Lh* (*Mi* ad *Li*,*gi* ad *hi*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eadem



ratione. Secetur *DL* in *R* ut ſit *DL* ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*, erit ex æquo ut *gS* ad L*h* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL* − *RL* ad L*h* − *BL* ut *AS* − *DS* ad *gS* − *AS*. Id eſt B*R* ad B*h* ut *AD* ad *Ag*, adeoq; ut B*D* ad *gQ*. Et viciſſim B*R* ad B*D* ut B*h* ad *gQ* ſeu *fh* ad *fg*. Sed ex conſtructione eſt B*R* ad B*D* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* eſt ad *fg* ut *FH* ad F*G*. Cum igitur ſit etiam *ig* ad *ih* ut *Mi* ad L*i*, id eſt, ut *IG* ad *IH*, patet lineas F*I*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E.* F.

In conſtructione Corollarii hujus poſtquam ducitur *LK* ſecans

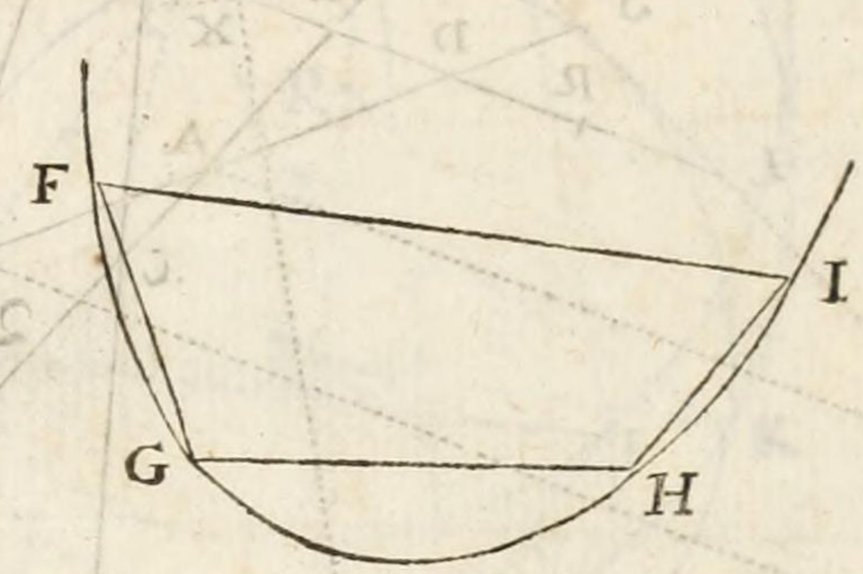
EC

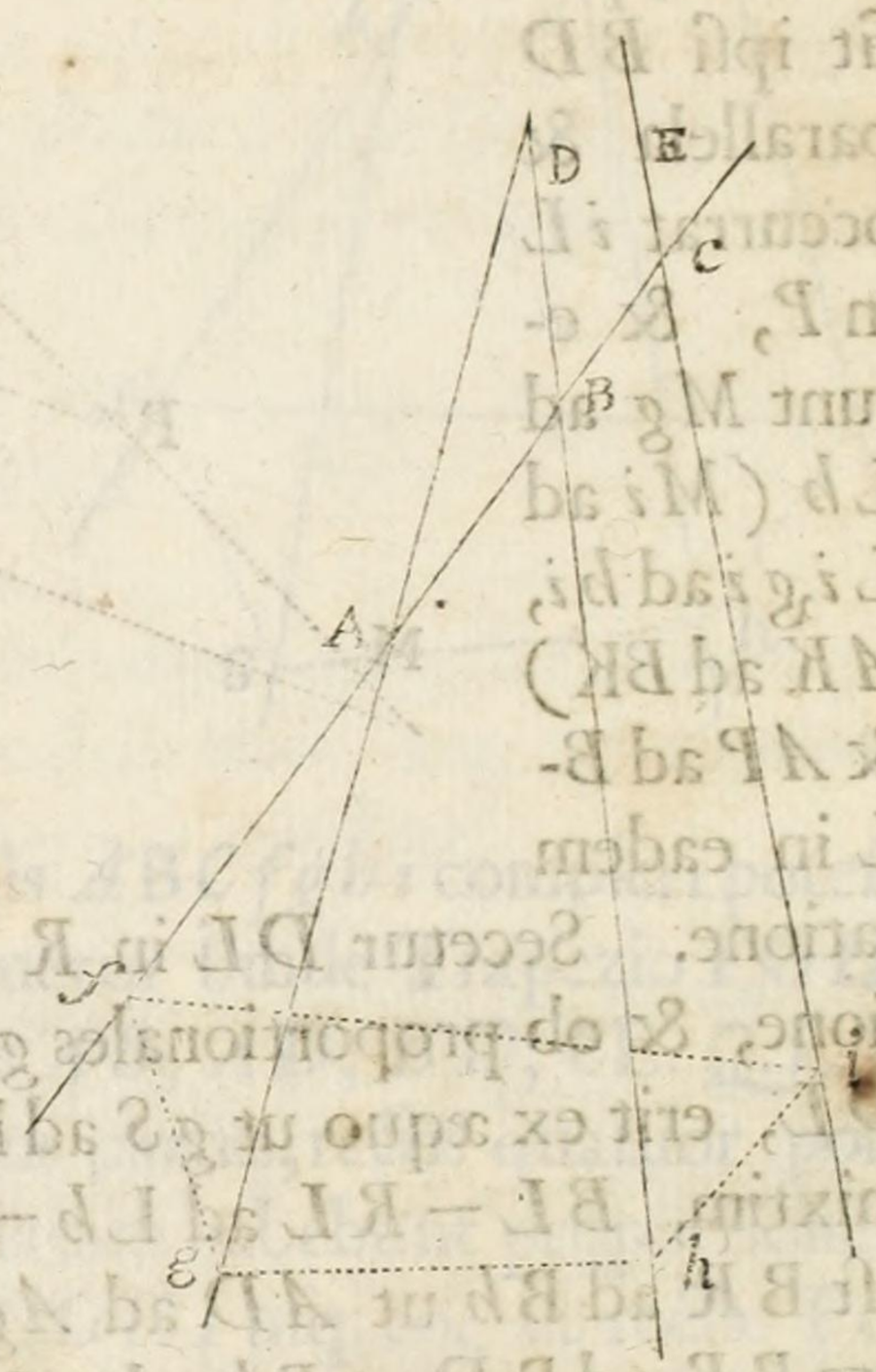
C E in *i*, producere licet *i* E ad *V*, ut ſit E *V* ad *i* E ut F *H* ad *H I*, & agere *V f* parallelam ipſi B *D*. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo *I H* deſcribatur circulus ſecans B *D* in *X*, producatur *i X* ad *Y*, ut ſit *i Y* æqualis *I* F, & agatur *Y f* ipſi B *D* parallela.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit Trajectoria *f g h i*, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ F *G H I*, & cujus partes *f g*, *g h*, *h i* illius partibus F G, G *H*, *H I* ſimiles & proportionales, rectis *A*-B & *A D* *A D* & B *D*, B-*D* & E *C* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis F G, G *H*, H I, F I, deſcribatur Trapezium *f g h i* quod ſit Trapezio F G H I ſimile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *A* B, *A D*, B *D*, *C* E ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein (per Lem. XXVII) circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ lineæ F G H I conſimilis.

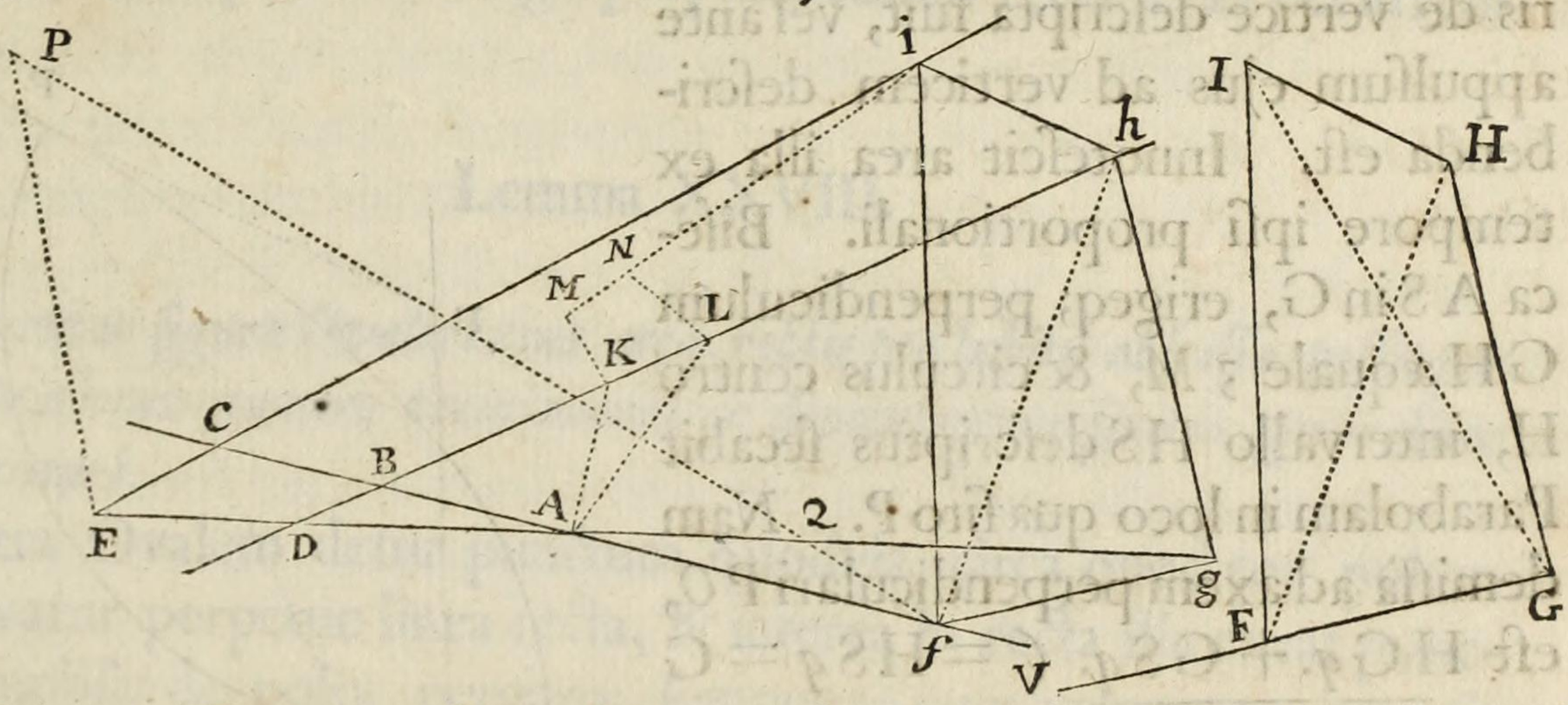




Scho-

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis F G, G H, H I, F I produc G F ad V, jungeq; F H, *I* G, & angulis F G H, V F H fac angulos *C* A *K*, *D* A L æquales. Concurrant A K, A L cum recta B D in K & L, & inde agantur K *M*, L *N*, quarum K *M* conſtituat angulum A K *M* æqualem angulo G H I, ſitq; ad A K ut eſt H I ad G H; & L *N* conſtituat angulum A L-N æqualem angulo F H I, ſitq; ad A L ut H I ad F H. Ducantur autem A K, K M, A *L*, L N ad eas partes linearum A *D*, A K, A L, ut literæ *C A K M C*, A L K, *D A L N D* eodem ordine cum literis F G H I F in orbem redeant, & acta *M N* occurrat rectæ



C E in *i*. Fac angulum *i* E P æqualem angulo I *G* F, ſitq; P E ad E *i* ut F G ad G I; & per P agatur *Q P f*; quæ cum recta A E *D* contineat angulum *P Q* E æqualem angulo F I G, rectæq; A B occurrat in *f*, & jungatur *f i*. Agantur autem *P* E & *P Q* ad eas partes linearum *C* E, P E, ut literarum P *E i* P & P E *Q* P idem ſit ordo circularis qui literarum F G H I F, & ſi ſuper linea *f i* eodem quoq; literarum ordine conſtituatur Trapezium *f g h i* Trapezio F G H I ſimile, & circumſcribatur Trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC-

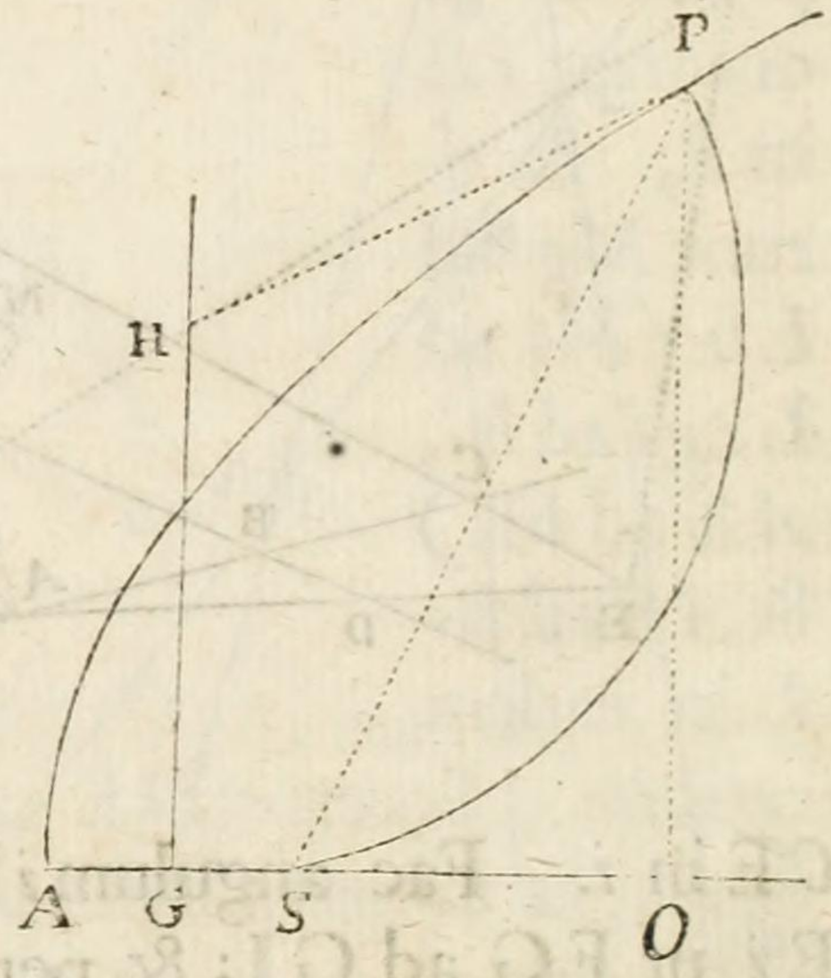
SECT. VI.

De inventione motuum in Orbibus datis.

Prop. XXX. Prob. XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moventis, invenire locum ad tempus assignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitq; 4 A S x *M* area Parabolica A P S, quæ radio S P, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit area illa ex tempore ipsi proportionali. Biseca A S in G, erigeq; perpendiculum G H æquale 3 *M*, & circulus centro H, intervallo H S descriptus secabit Parabolam in loco quæsito P. *Nam* demissa ad axem perpendiculari P *O*, est $\overline{HG\,q. + GS\,q.}$ (= H S *q* = G *O q.* + *HG q.* − P *O q.*) = G *O q.* + *HG q* − 2 H G x P *O* + P *O q.* Et deleto utrinq; *HG q.* fiet G S *q.* = G *O q.* − 2 H G x P *O* + P *O q.* seu 2 *H*-G x P *O* (= G *O q.* + P *O q.* − G S *q.* = A *O q.* − 2 G A *O* + P *O q.*) = A *O q.* + $\frac{3}{4}$ P *O q.* Pro A *O q.* scribe $AO \times \frac{PO\,q.}{4AS}$, & applicatis terminis omnibus ad 3 P *O*, ductisq; in 2 A S, fiet $\frac{4}{3}$ G *H* x A S (= $\frac{1}{2}$ A *O* x P *O* + $\frac{1}{2}$ A S x P *O* = $\frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$ = areæ A P *O* − S P *O*) = areæ A P S. Sed *GH* erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}$ *HG*



$\frac{4}{7}$HG x AS est 4 AS x M. Ergo area APS æqualis est 4 AS x M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et circulo ASP per corpus movens perpetuo transeunte, velocitas puncti G est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; adeoq; in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam viceversa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in *H*.

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem longitudo. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si area Oualis per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, adeoq; omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem,

adeoq; aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenitur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoq; & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Eadem de cauſa interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & curvarum tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor,& ſic in infinium. Ergo interſectiones numero infinitæ rectarum, propterea quod omnium eadem eſt lex & idem calculus, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus omnes poſſunt ſimul exhiberi. Si a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum,& perpendiculum una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæq; prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam,adeoq; una eademq; exhibebit interſectiones

ones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

Corollarium.

Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam, & propterea per deſcriptionem Curuarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſq; (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam Geometrice irrationalem ut ſequitur.

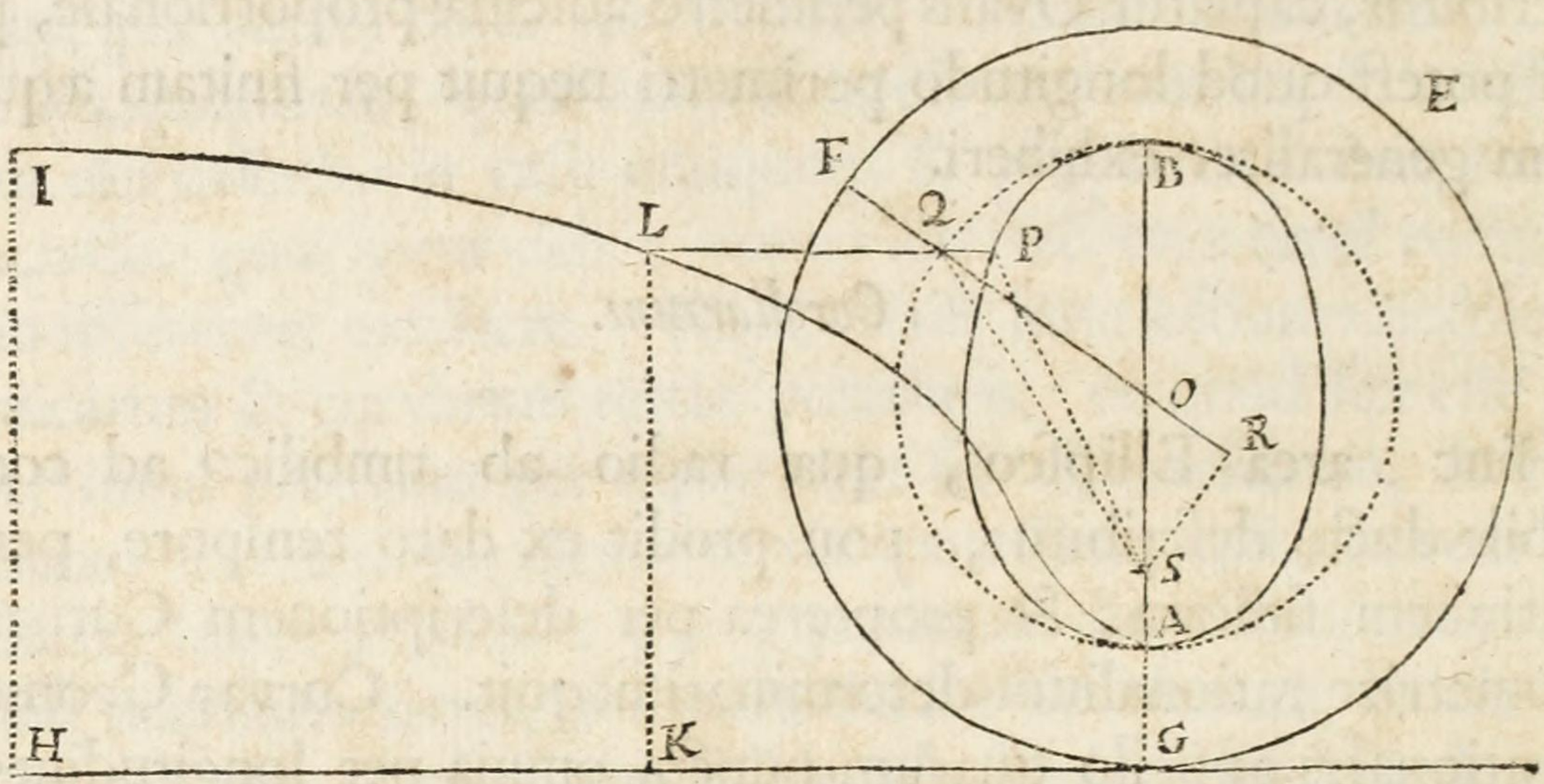
Prop. XXXI. Prob. XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos *APB* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, *O* centrum, ſitq; *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G* ut ſit *OG*

 ad

ad *O A* ut *O A* ad *O S*. Erige perpendiculum *G H*, centroq; *O* & intervallo *O G* deſcribe circulum *E F G*, & ſuper regula *G H*, ceu fundo, progrediatur rota *G E F* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo Trochoidem *A L I*. Quo facto, cape *G K* in ratione ad rotæ perimetrum *G E F G*, ut eſt tempus quo corpus progrediendo ab *A* deſcripſit arcum *A P*, ad tempus



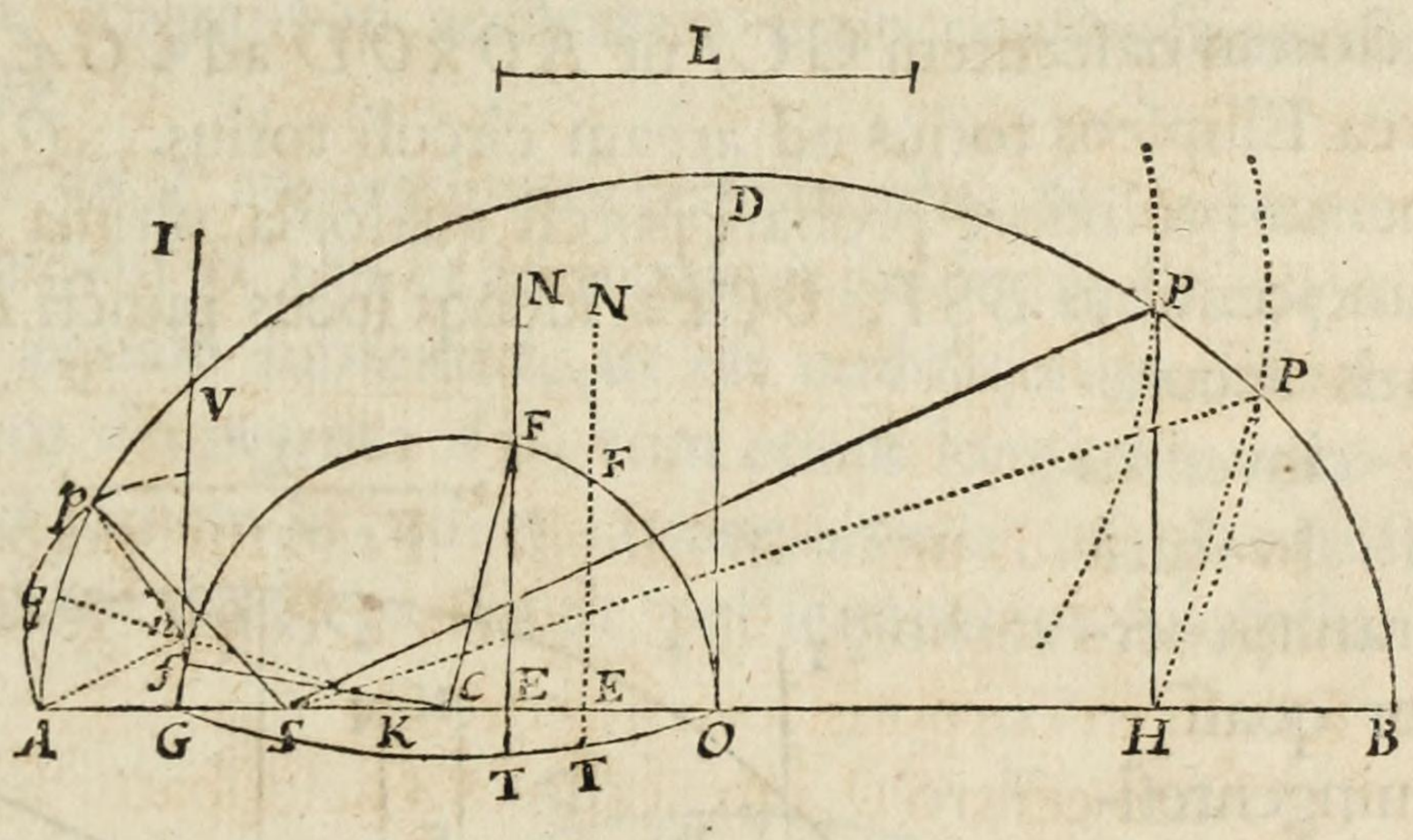
revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum *K L* occurrens Trochoidi in *L*, & acta *L P* ipſi *K G* parallela occurret Ellipſi in corporis loco quæſito *P*.

*N*am centro *O*, intervallo *O A* deſcribatur ſemicirculus *A Q B*, & arcui *A Q* occurrat *L P* producta in *Q*, junganturq; *S Q*, *O Q*. Arcui *E F G* occurrat *O Q* in *F*, & in eandem *O Q* demittatur perpendiculum *S R*. Area *A P S* eſt ut area *A Q S*, id eſt, ut differentia inter ſectorem *O Q A* & triangulum *O Q S*, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$ *O Q* x *A Q* & $\frac{1}{2}$ *O Q* x *S R*, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}$ *O Q*, ut differentia inter arcum A *Q* & rectam *S R*, adeoq; (ob æqualitatem rationum *S R* ad ſinum arcus *A Q*, *O S* ad *O A*, *O A* ad *O G*, *A Q* ad *G F*, & diviſim *A Q* − *S R* ad *G F* − ſin. arc. *A Q*) ut *G K* differentia inter arcum *G F* & ſinum arcus A *Q*. *Q*. E. *D*.

Scho-

Scholium.

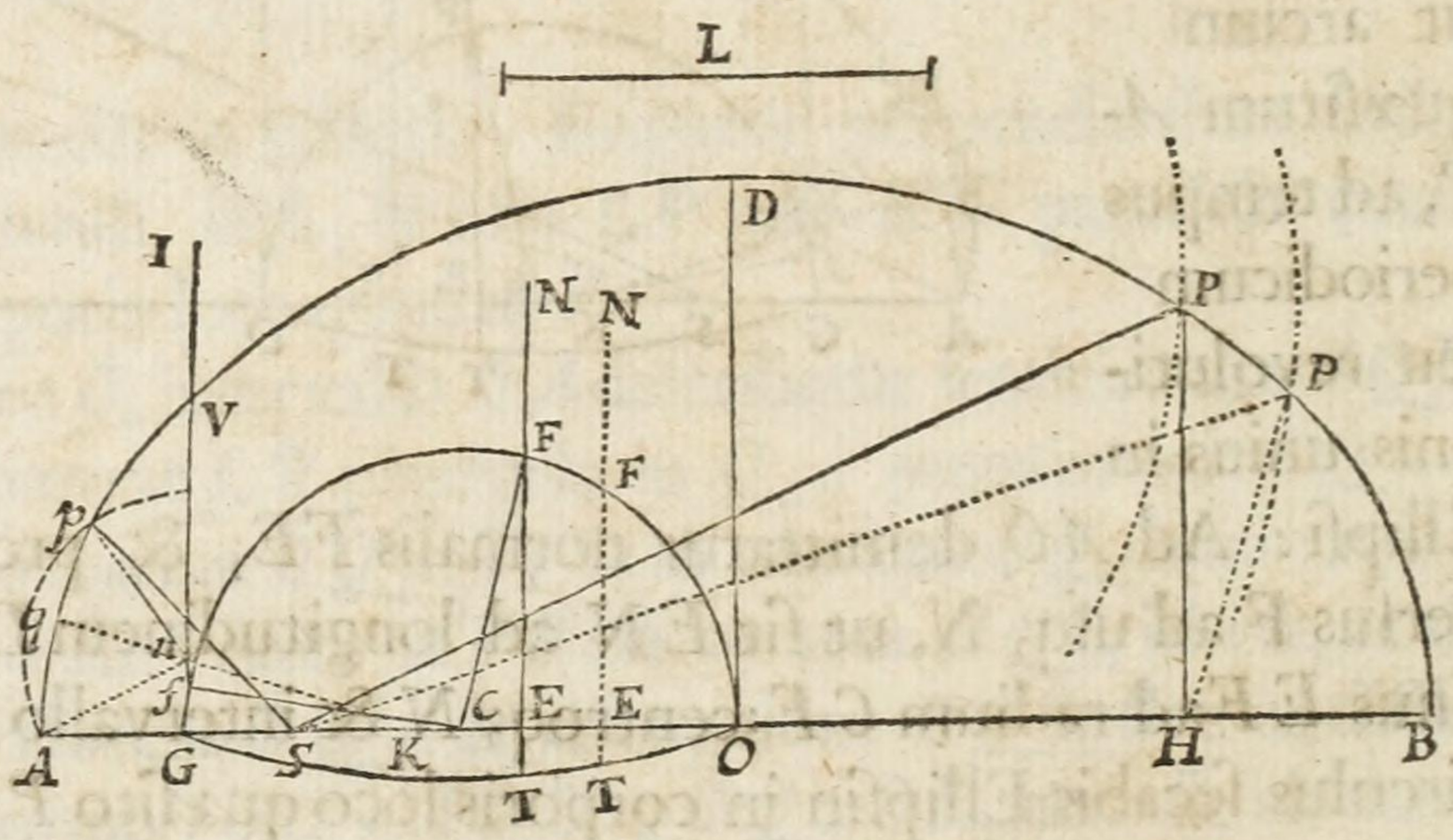
Cæterum ob difficultatem deſcribendi hanc curvam præſtat conſtructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. Ellipſeos cujuſvis A *P B* ſit A *B* axis major, *O* centrum, *S* umbilicus, *O D* ſemiaxis minor, & *A K* dimidium lateris recti. Secetur *A S* in *G*, ut ſit AG ad AS ut *BO* ad *BS*; & quæratur longitudo *L*, quæ ſit ad $\frac{1}{2}$ *G K* ut eſt *A O quad.* ad rectangulum *A S* x *O D*. Biſecetur *O G* in *C*, centroq; *C* & intervallo *C G* deſcribatur ſemicirculus *G F O*. Deniq; capiatur angulus *G C F* in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus deſcripſit arcum quæſitum *A P*, ad tempus periodicum ſeu revolutionis unius in Ellipſi: Ad *A O* demittatur normalis *F E*, & producatur eadem verſus F ad uſq; *N*, ut ſit *E N* ad longitudinem *L*, ut anguli illius ſinus *E F* ad radium *C F*; centroq; *N* & intervallo *A N* deſcriptus circulus ſecabit Ellipſin in corporis loco quæſito *P* quam proxime.



Nam completo dimidio temporis periodici, corpus *P* ſemper reperietur in Apſide ſumma *B*, & completo altero temporis dimidio, redibit ad Apſidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abeſt ab Apſidibus, ratio prima naſcentium ſectorum A S P, G C F, & ratio ultima evaneſcentium *B S P* & *O C F*, eadem eſt rationi Ellipſeos totius ad circulum totum. Nam punctis

P,

P, F & N incidentibus in loca p, f & n axi AB quam proximis; ob æquales An, pn, recta nq, quæ ad arcum Ap perpendicularis eſt, adeoq; concurrit cum axe in puncto K, biſecat arcum Ap. Proinde eſt $\frac{1}{2}Ap$ ad Gn ut AK ad GK, & Ap ad Gn ut $2AK$ ad GK. Eſt & Gn ad Gf ut EN ad EF, ſeu L ad CF, id eſt, ut $\frac{GK \times AOq.}{2AS \times OD}$ ad CF, ſeu $GK \times AOq.$ ad $2AS \times OD \times CF$, & ex æquo Ap ad Gf ut $2AK$ ad $GK + GK \times AOq.$ ad $2AS \times OD \times CF$, id eſt, ut $AK \times AOq.$ ad $AS \times OD \times CF$, hoc eſt, ob æqualia $AK \times AO$ & $ODq.$ ut $AO \times OD$ ad $AS \times CF$. Proinde $Ap \times \frac{1}{2}AS$ eſt ad $Gf \times \frac{1}{2}GC$ ut $AO \times OD \times AS$ ad $AS \times CF \times GC$, ſeu $AO \times OD$ ad $CGq.$ id eſt, ſector naſcens ASp ad ſectorem naſcentem GCf ut $AO \times OD$ ad $CGq.$ & propterea ut area Ellipſeos totius ad aream circuli totius. Q. E. D. Argumento prolixiore probari poteſt analogia ultima in Sectoribus evaneſcentibus BSP, OCF: ideoq; locus puncti P prope Apſides ſatis accurate inventus eſt. In quadraturis error quaſi quingenteſimæ partis areæ Ellipſeos totius vel paulo major obvenire ſolet: qui tamen propemodum evaneſcet per ulterioremConſtructionem ſequentem.

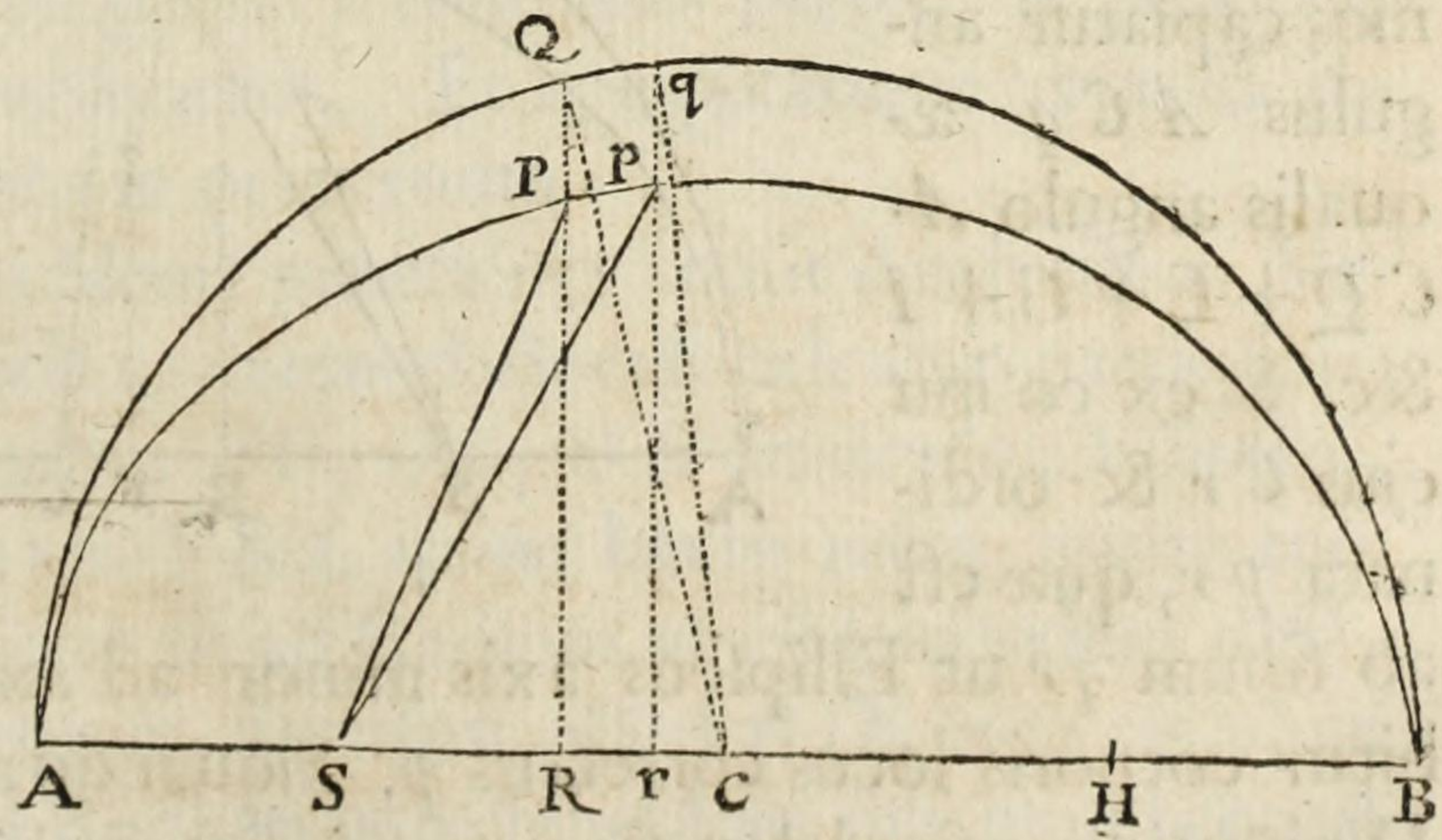


Per puncta G, O, duc arcum circularem GTO juſtæ magnitudinis; dein produc EF hinc inde ad T & N ut ſit EN ad FT ut $\frac{1}{2}L$ ad CF; centroq; N & intervallo AN deſcribe circulum qui ſecet Ellipſin in P, ut ſupra. Arcus autem GTO determinabitur quæ-

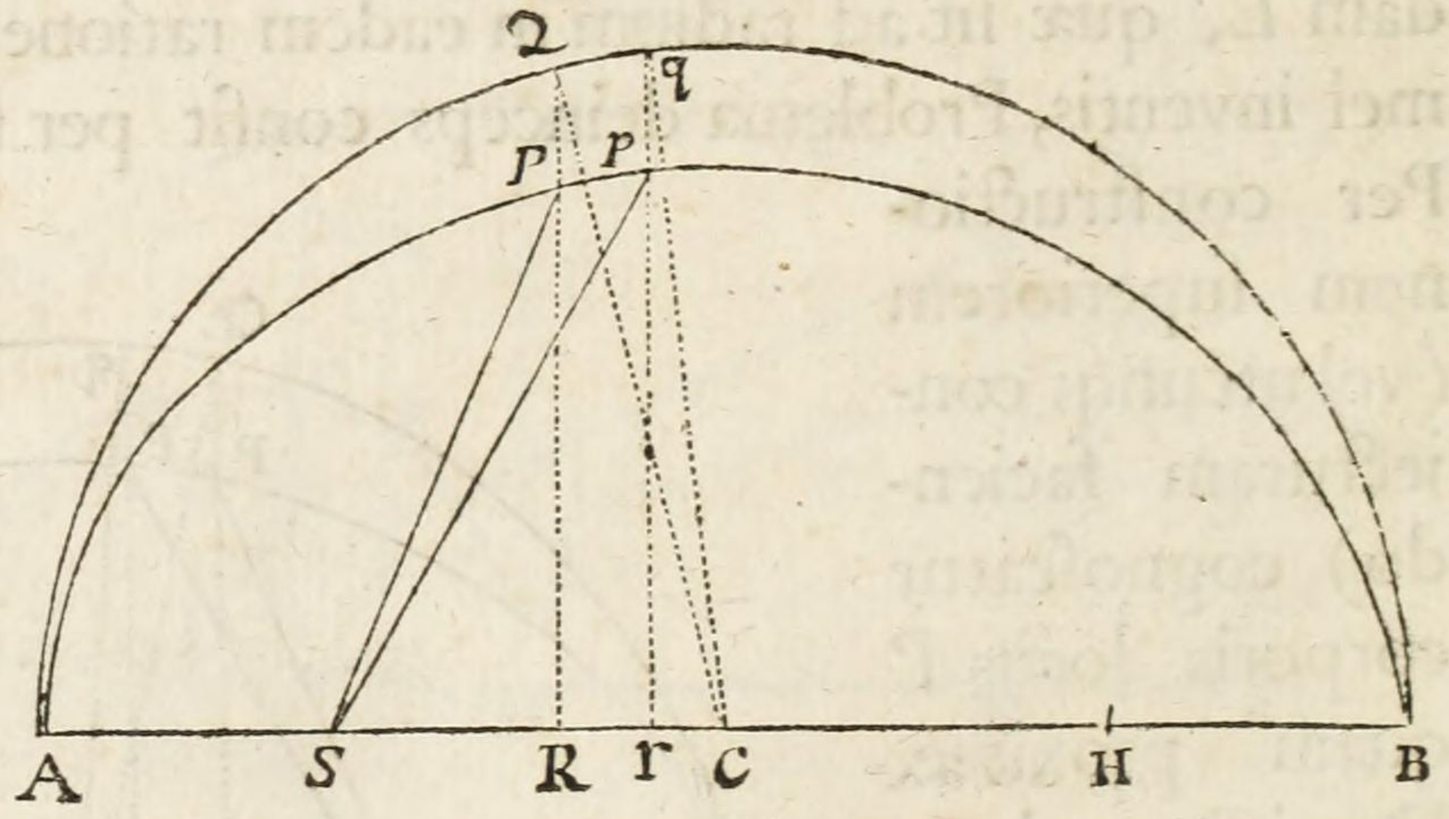
quærendo ejus punctum aliquod *T*; quod conſtructionem in illo caſu accuratam reddet.

Si Ellipſeos latus tranſverſum multo majus ſit quam latus rectum, & motus corporis prope verticem Ellipſeos deſideretur, (qui caſus in Theoria Cometarum incidit,) educere licet e puncto *G* rectam *GI* axi *AB* perpendicularem, & in ea ratione ad *GK* quam habet area *AVPS* ad rectangulum *AK* x *AS*; dein centro *I* & intervallo *AI* circulum deſcribere. Hic enim ſecabit Ellipſim in corporis loco quæſito *P* quamproxime. Et eadem conſtructione (mutatis mutandis) conficitur Problema in Hyperbola. Hæ autem conſtructiones demonſtrantur ut ſupra, & ſi Figura (vertice ulteriore *B* in infinitum abeunte) vertatur in Parabolam, migrant in accuratam illam conſtructionem Problematis. XXII.

Si quando locus ille *P* accuratius determinandus ſit, inveniatur tum angulus quidam *B*, qui ſit ad angulum graduum 57,29578 quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia *SH* ad Ellipſeos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam *L*, quæ ſit ad radium in eadem ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps confit per ſequentem Analyſin. Per conſtructionem ſuperiorem (vel utcunq; conjecturam faciendo) cognoſcatur corporis locus *P* quam proxime. Demiſſaq; ad axem Ellipſeos ordinatim applicata *PR*, ex proportione diametrorum Ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ ſinus eſt anguli *ACQ* exiſtente



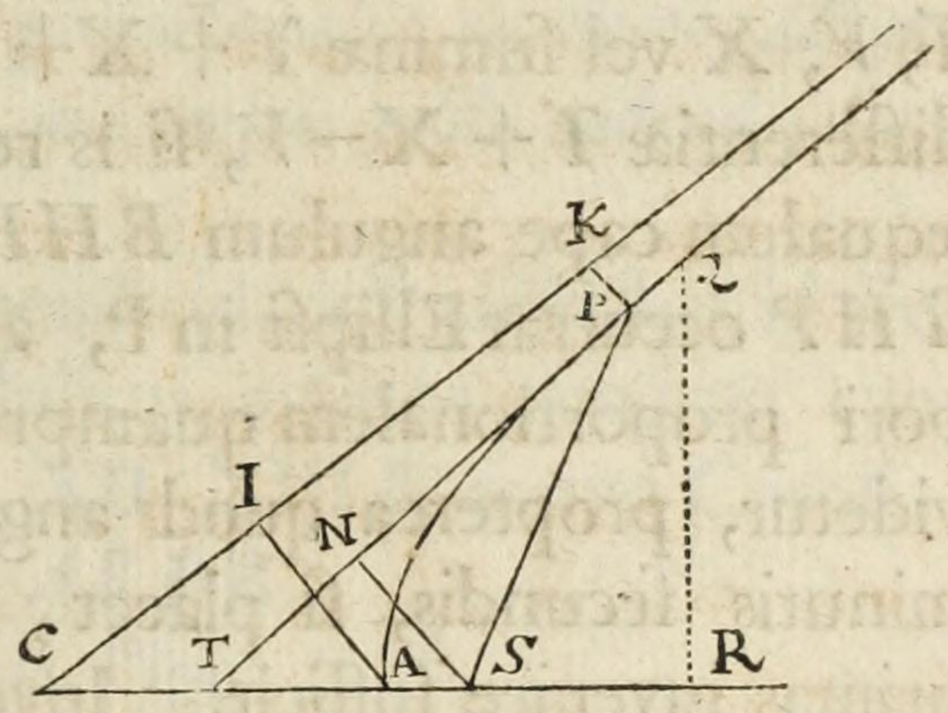
te *A C* radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori porportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos ut eſt tempus quo corpus deſcripſit arcum *A P*, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte *N*. Tum capiatur & angulus *D* ad angulum *B*, ut eſt ſinus iſte anguli *A C Q* ad Radium, & angulus *E* ad angulum $N - ACQ + D$, ut eſt longitudo *L* ad longitudinem eandem *L* coſinu anguli $ACQ + \frac{1}{2} D$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum augulus *F* ad angulum *B*, ut eſt ſinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus *G* ad angulum $N - ACQ - E + F$ ut eſt longitudo *L* ad Longitudinem eandem coſinu anguli $ACQ + E + \frac{1}{2} F$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus *H* ad angulum *B*, ut eſt ſinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium; & angulus *I* ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut eſt longitudo *L* ad eandem longitudinem coſinu anguli $ACQ + E + G + \frac{1}{2} H$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Deniq; capiatur angulus *A C q* æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex coſinu ejus *C r* & ordinata *p r*, quæ eſt



ab ſinum *q r* ut Ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Siquando angulus $N - ACQ + D$ negativus eſt, debet ſignum + ipſius *E* ubiq; mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum *G* & *I*, ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ negativi

tive prodeunt. Convergit autem ſeries infinita $ACQ+E+G+I$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS ſit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium CQ perpendiculariter demiſſam.

Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus centrum C, Vertex A, Umbilicus S & Aſymtotos CK. Cognoſcatur quantitas areæ APS tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream illam abſcindat quamproxime. Jungatur CP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eiq; æqualis area CPA, quæ ſubducta de triangulo CPS relinquet aream APS. Applicando arearum A & APS ſemidifferentiam $\frac{1}{2}APS-\frac{1}{2}A$ vel $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis eſt, orietur longitudo PQ. Capiatur autem PQ inter A & P, ſi area APS major ſit area A, ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratius. Et computatione repetita invenietur idem accuratius in perpetuum.



Atq; his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, (*Vide fig. pag.* 109. 110.) & L ipſius latere recto, quære tum angulum Υ, cujus Tangens ſit ad Radium ut eſt ſemiaxium differentia $AO-OD$ ad eorum ſummam $AO+OD$; tum angulum Z, cujus tangens ſit ad Radium ut rectangulum ſub umbilicorum diſtantia SH & ſemiaxium differentia $AO-OD$ ad triplum rectangulum ſub OQ ſemiaxe minore & $AO-\frac{1}{4}L$ differentia inter ſe-

miaxem majorem & quartam partem lateris recti. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum *T* proportionalem tempori quo arcus *B* P descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum *V* (primam medii motus æquationem) ad angulum *Y* (æquationem maximam primam) ut est sinus anguli *T* duplicati ad radium; atq; angulum *X* (æquationem secundam) ad angulum *Z* (æquationem maximam secundam) ut est sinus versus anguli *T* duplicati ad radium duplicatum, vel (quod eodem recidit) ut est quadratum sinus anguli *T* ad quadratum Radii. Angulorum *T*, *V*, *X* vel summæ *T* + *X* + *V*, si angulus *T* recto minor est, vel differentiæ *T* + *X* − *V*, si is recto major est rectisq; duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) & si *HP* occurrat Ellipsi in P, acta *SP* abscindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum *V* & *X* (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *HSP* & distantia *SP* in promptu sunt per methodum notissimam Dris. *Sethi Wardi* Episcopi *Salisburiensis* mihi plurimum colendi,

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SECT.

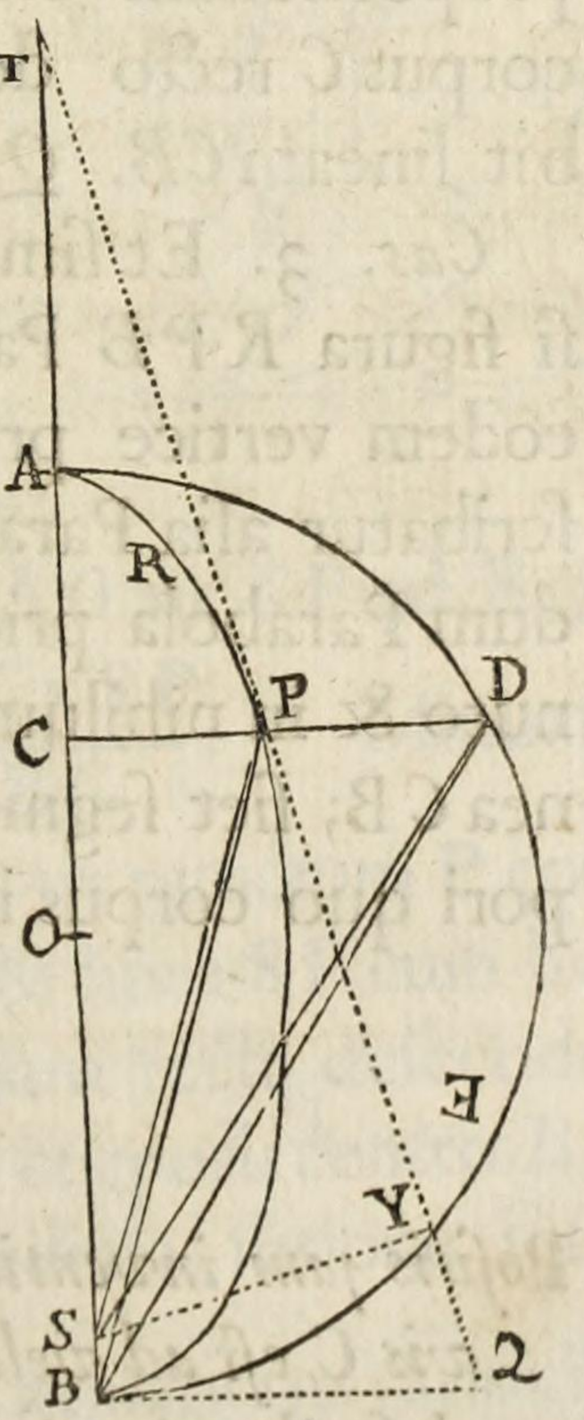
SECT. VII.

De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.

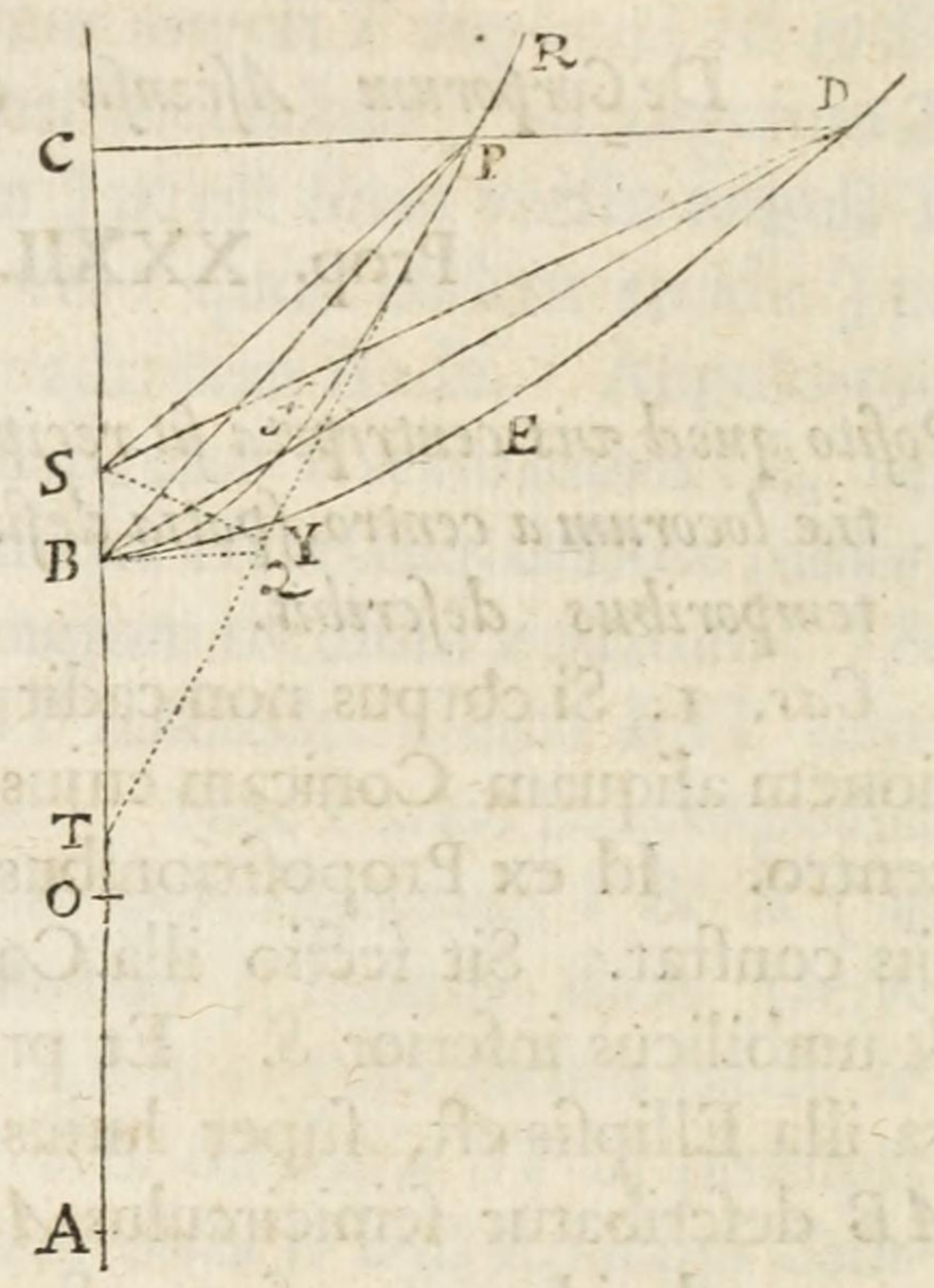
Prop. XXXII. Prob. XXIV.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſpatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id ſectionem aliquam Conicam cujus umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propoſitionibus XI, XII, XIII & earum Corollariis conſtat. Sit ſectio illa Conica *ARPB* & umbilicus inferior *S*. Et primo ſi Figura illa Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſq; *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atq; adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico S cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq; ſpatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



Cas. 2. Sin figura ſuperior *R P B* Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *A B* Hyperbola rectangula *B D:* & quoniam areæ *C* S P, *C B f* P, S P *f B* ſunt ad areas *C*-S *D*, *C B E D*, S *D E B*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *C* P, *C D*; & area S P *f B* proportionalis eſt tempori quo corpus P movebitur per arcum *P B*, erit etiam area S *D E B* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *R P B* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus P *B* cum recta *C B*, & umbilicus S cum vertice *B* & recta S *D* cum recta *B D*. Proinde area *B D E B* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *C B*. *Q. E. I.*



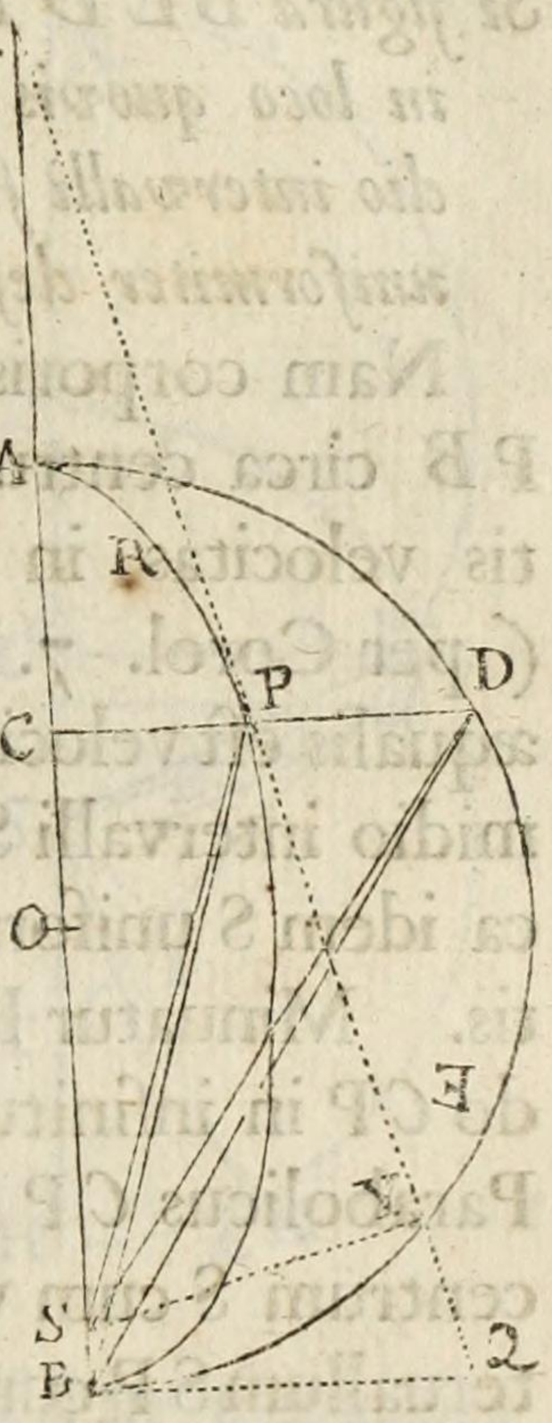
Cas. 3. Et ſimili argumento ſi figura *R P B* Parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia Parabola B *E D*, quæ ſemper maneat data, interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus Latere recto, conveniat cum linea *C* B; fiet ſegmentum Parabolicum B *D E* B proportionale tempori quo corpus illud P vel *C* deſcendet ad centrum B. *Q. E. I.*

Prop. XXXIII. Theor. IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C eſt ad velocitatem corporis centro B *intervallo* B C *circulum deſcribentis, in dimidiata ratione quam C A, diſtantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ vertice ulteriore A, habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* ½ *A* B.

Nam-

Namq; ob proportionales CD, CP, linea AB communis eſt utriuſq; figuræ RPB, DEB diameter. Biſecetur eadem in O, & agatur recta PT quæ tangat figuram RPB in P, atq; etiam ſecet communem illam diametrum AB (ſi opus eſt productam) in T; ſitq; $S\Upsilon$ ad hanc rectam & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ RPB latus rectum ponatur L. Conſtat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum circulum deſcribentis in dimidiata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad $S\Upsilon$ quadratum. Eſt autem ex Conicis ACB ad $CPq.$ ut $2AO$ ad L, adeoq; $\frac{2CPq. \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in dimidiata ratione $\frac{CPq. \times AO \times SP}{ACB}$ ad $S\Upsilon$ *quad.* Porro ex Conicis eſt CO ad BO ut BO ad TO, & compoſite vel diviſim ut CB ad BT. Unde dividendo vel componendo fit $BO -$ uel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id eſt AC ad AO ut CP ad BQ; indeq; $\frac{CPq. \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq. \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumq; S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaq; $S\Upsilon$ cum linea BQ; & corporis jam recta deſcendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B interuallo BC circulum deſcribentis, in dimidiata ratione ipſius $\frac{BQq. \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad $S\Upsilon q.$ hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & $BQq.$ ad $S\Upsilon q.$) in dimidiata ratione AC ad AO. *Q. E. D.*



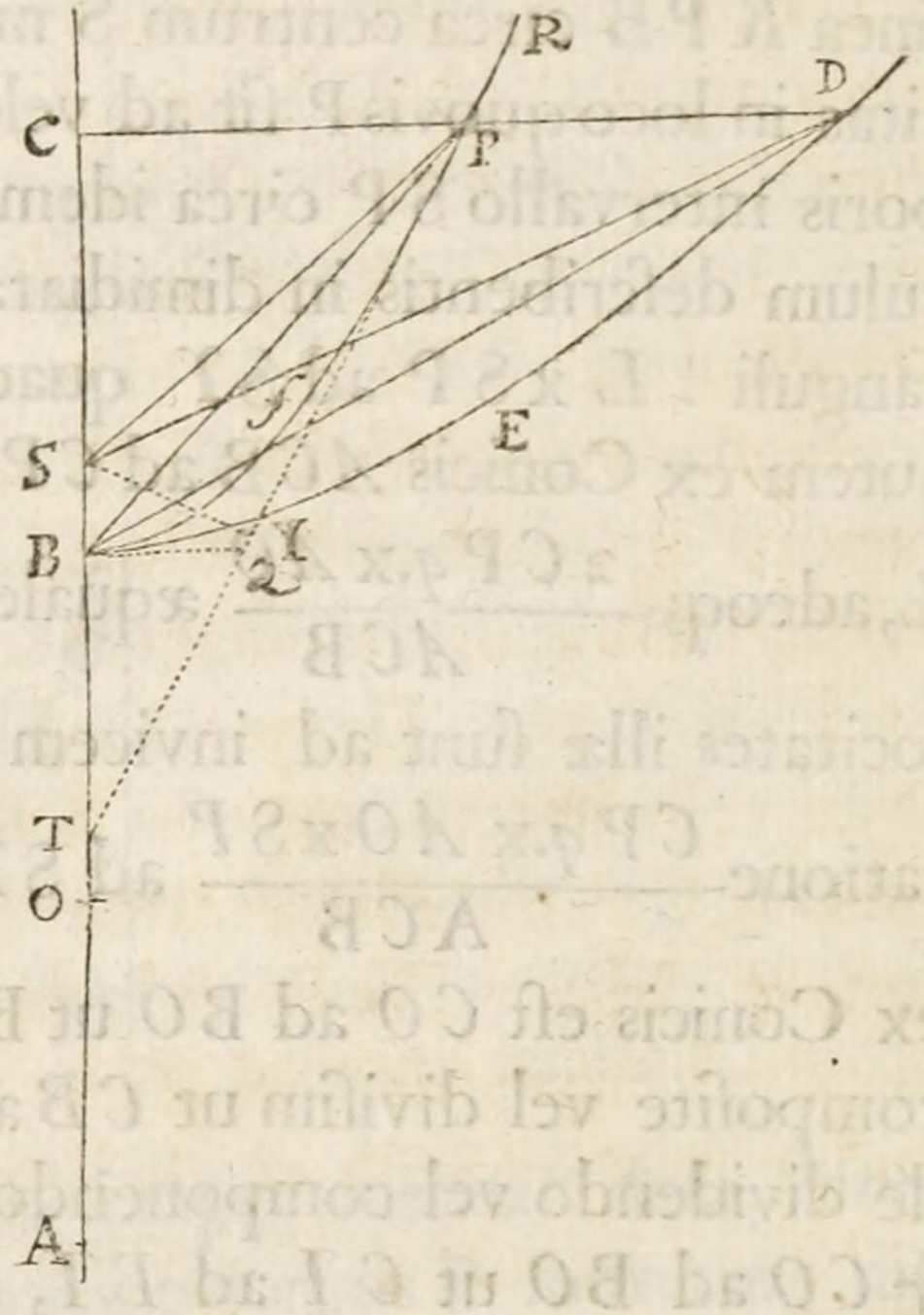
Corol.

Corol. Punctis *B* & S coeuntibus, fit *TC* ad S*T* ut A*C* ad A *O*.

Prop. XXXIV. Theor. X.

Si figura B E D Parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis eſt velocitati qua corpus centro B dimidio intervalli ſui B C circulum uniformiter deſcribere poteſt.

Nam corporis Parabolam *R P B* circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis S (per Corol. 7. Theor. VIII) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli S P circulum circa idem S uniformiter deſcribentis. Minuatur Parabolæ latitudo *C* P in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *C* P cum recta *C B*, centrum S cum vertice *B*, & interuallum S P cum intervallo *C* P coincidat, & conſtabit Propoſitio. *Q. E. D.*



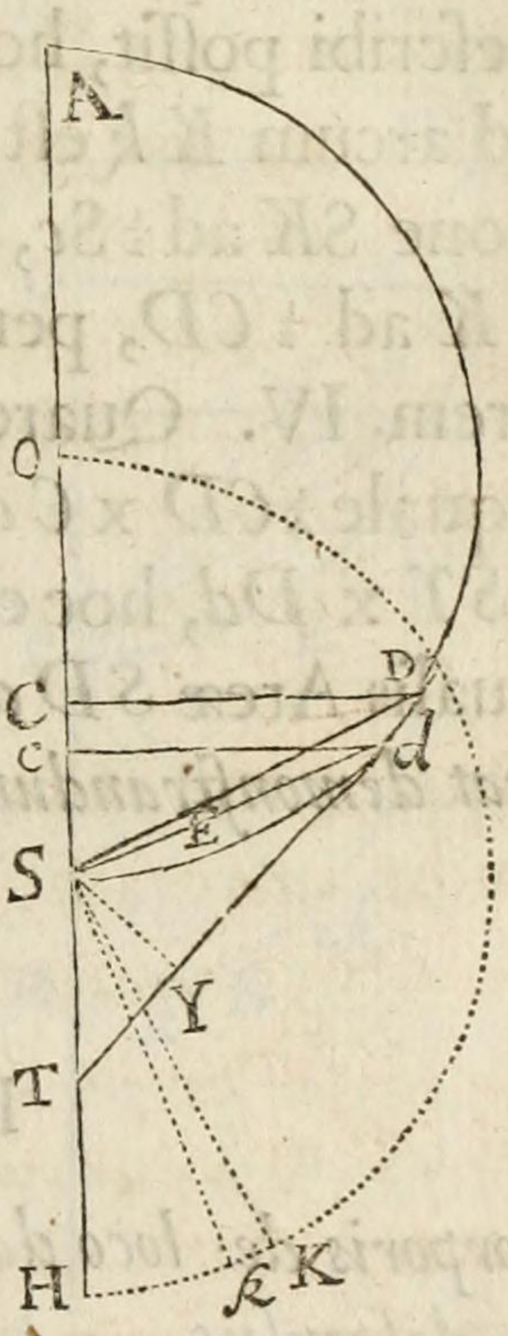
Prop. XXXV. Theor. XI.

Iiſdem poſitis, dico quod area figuræ D E S, radio indefinito S D deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ D E S æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *C c* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo *O K k* circa centrum *S* gyrando, arcum *K k* deſcribere

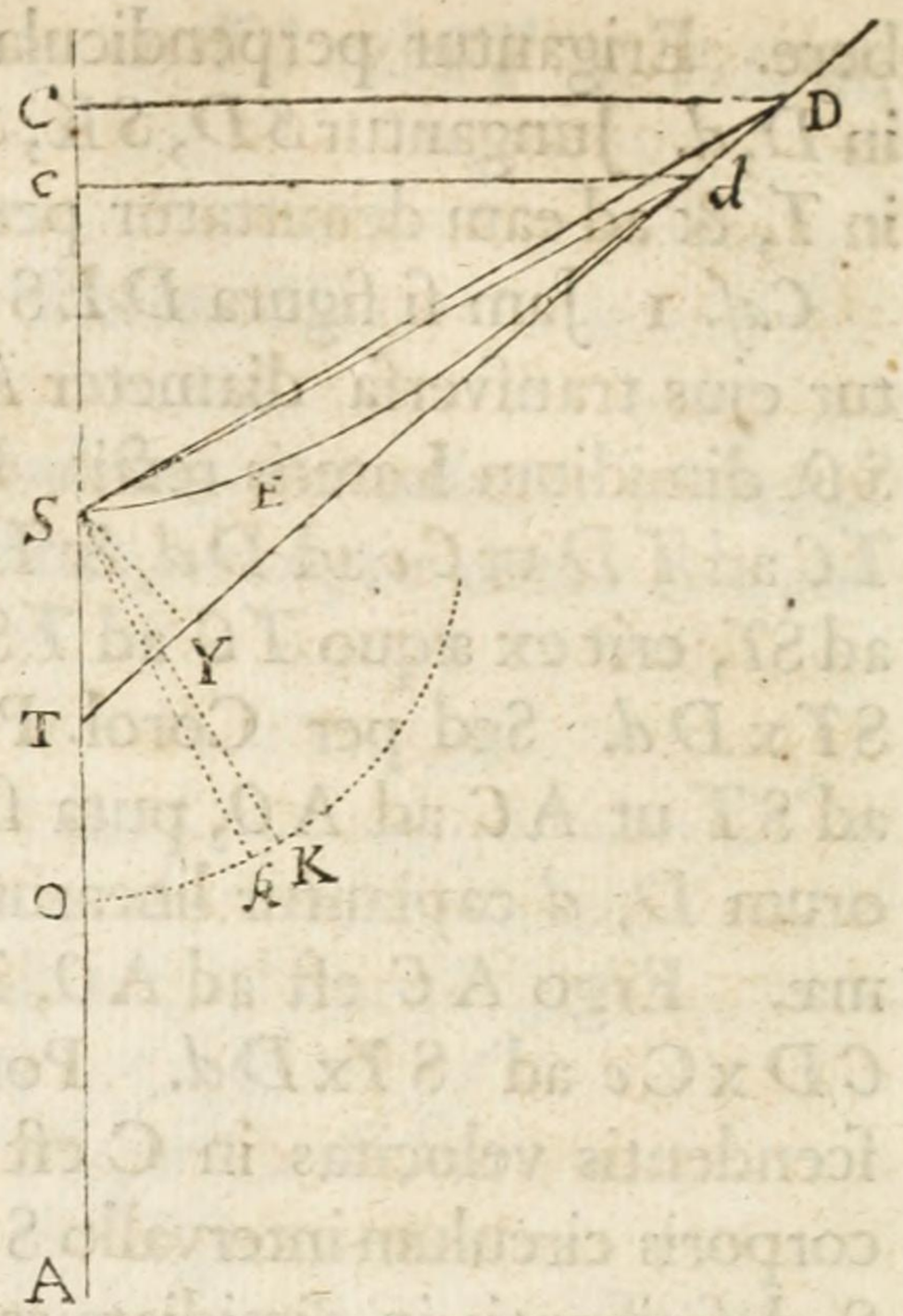
bere. Erigantur perpendicula *C D*, *c d* occurrentia figuræ *D E S* in *D*, *d*. Jungantur *S D*, *S K*, *S k* & ducatur *D d* axi A S occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum S *Y*.

Cas. 1 Jam si figura *D E* S Circulus est vel Hyperbola, bisecetur ejus transversa diameter A S in *O*, & erit S *O* dimidium Lateris recti. Et quoniam est *T C* ad *T D* ut *C c* ad *D d*, & *T D* ad *T* S ut *C D* ad S *Y*, erit ex æquo *T C* ad *T* S ut *C D* x *C c* ad S *Y* x *D d*. Sed per Corol. Prop. 33. est *T C* ad S *T* ut A *C* ad A *O*, puta si in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo A *C* est ad A *O*, id est ad S *K*, ut *C D* x *C c* ad S *Y* x *D d*. Porro corporis descendentis velocitas in C est ad velocitatem corporis circulum intervallo S C circa centrum S describentis in dimidiata ratione A C ad A *O* vel S *K* (per Theor IX.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum *O K k* in dimidiata ratione S *K* ad S C per Cor. 6. Theor. IV. & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola *C c* ad arcum *K k* in dimidiata ratione A C ad S C, id est in ratione A C ad *C D*. Quare est *C D* x *C c* æquale A C x *K k*, & propterea A C ad S *K* ut A C x *K k* ad S *Y* x *D d*, indeq; S *K* x *K k* æquale *S Y* x *D d*, & ½ S *K* x *K k* æquale ½ S *Y* x *D d*, id est area *K S k* æqualis areæ S *D d*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *K S k*, S *D d*, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q. *E.* D.



Cas. 2. Quod si figura *D E* S Parabola sit, invenietur ut supra C D x C *c* esse ad S *Y* x *D d* ut *T* C ad *S T*, hoc est ut 2 ad 1, adeoq; ¼ C D x C *c* æqualem esse ½ *S Y* x D *d*. Sedcorporis cadentis

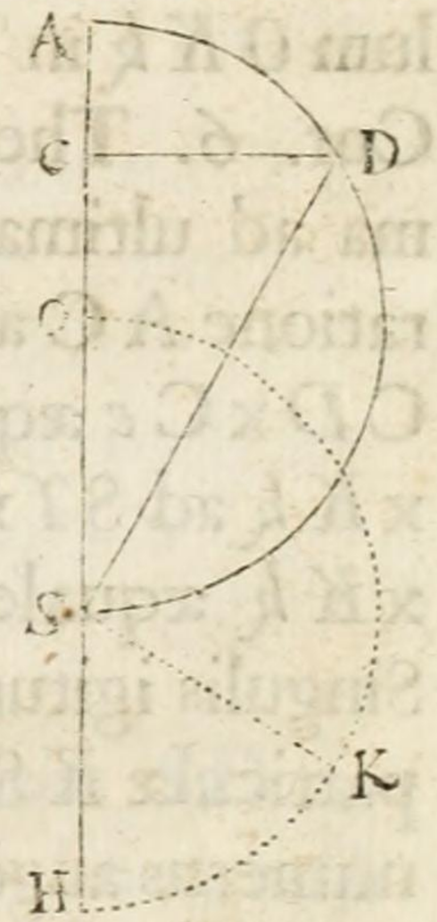
tis velocitas in *C* æqualis eſt velocitati qua circulus intervallo ½S*C* uniformiter deſcribi poſſit. (per Theor. X.)Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio *SK* deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola *Cc* ad arcum *Kk* eſt in dimidiata ratione *SK* ad ½*Sc*, id eſt, in ratione *SK* ad ½*CD*, per Corol. 6. Theorem. IV. Quare eſt ½*SK* x *Kk* æquale ¼*CD* x *Cc*, adeoq; æquale ½*SY* x *Dd*, hoc eſt, area *KSk* æqualis Areæ *SDd*, ut ſupra. *Quod erat demonſtrandum.*



Prop. XXXVI. Prob. XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora deſcenſus.

Super diametro *AS* (diſtantia corporis a centro ſub initio) deſcribe ſemicirculum *ADS*, ut & huic æqualem ſemicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem conſtitue Sectionem *OSK*. Patet per Theor. XI, quod corpus cadendo deſcribet ſpatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, deſcribere poteſt arcum *OK*. *Quod erat faciendum.*

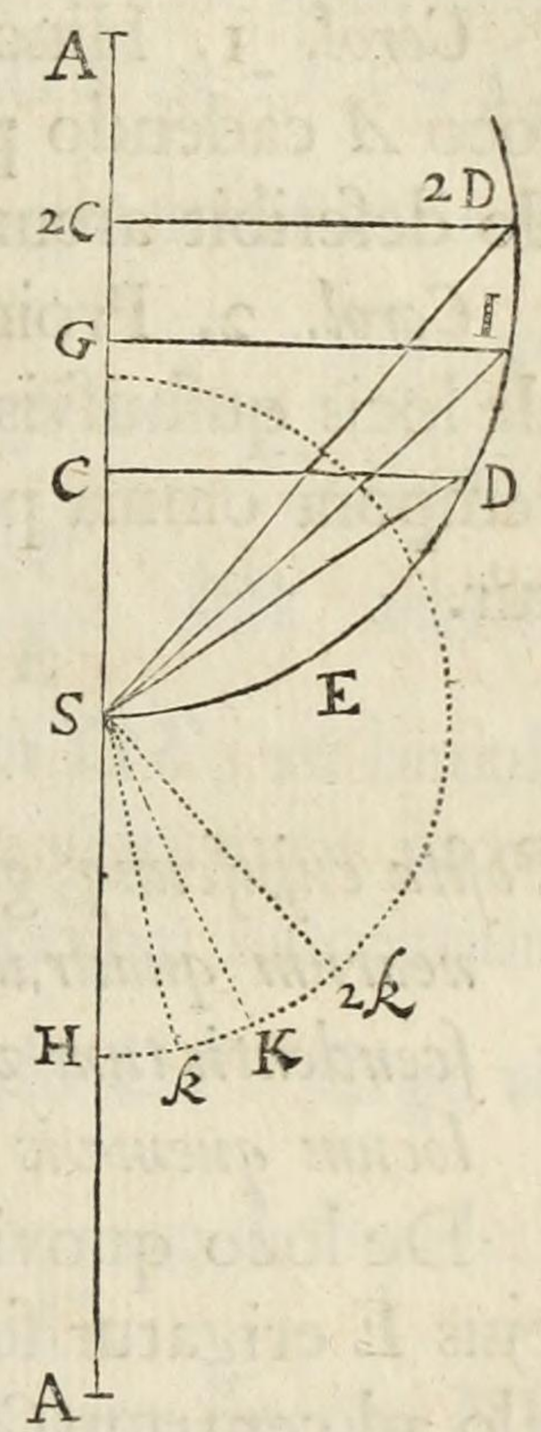


Prop. XXXVII. Prob. XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Ex-

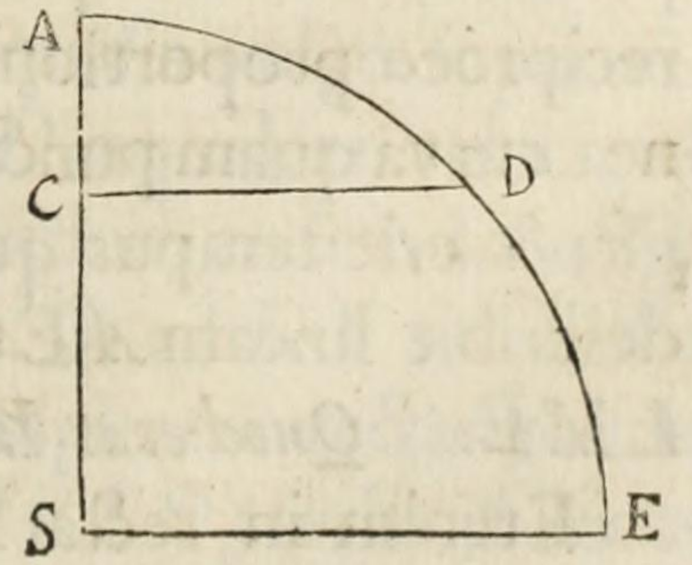
Exeat corpus de loco dato *G* ſecundum lineam *ASG* cum velocitate quacunq;. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem,qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *CA* ad ½ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* cadet ad infinitam diſtantiam, quo in caſu Parabola uertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Theorema X. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu Circulus, poſteriore Hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. Patet per Theorema IX. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti,deſcribatur circulus *HKk*, & ad corporis aſcendentis vel deſcendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel circulo in *I* ac *D*.Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS* Sectores *HSK*, *HSk* æquales, & per Theorema XI. corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. Q. E. F.



Prop. XXXVIII. Theor. XII.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus arcuumq; ſinibus verſis & ſinibus rectis reſpective proportionales.

Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur circuli quadrans *AE*, ſitq; *CD* ſinus rectus arcus cujuſ-



vis

vis *AD*, & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribet ſpatium *AC*, inq; loco *C* acquiſierit velocitatem *CD*. Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione X. quo Propoſitio *XXXII.* ex Propoſitione *XI.* demonſtrata fuit. Q. E. D.

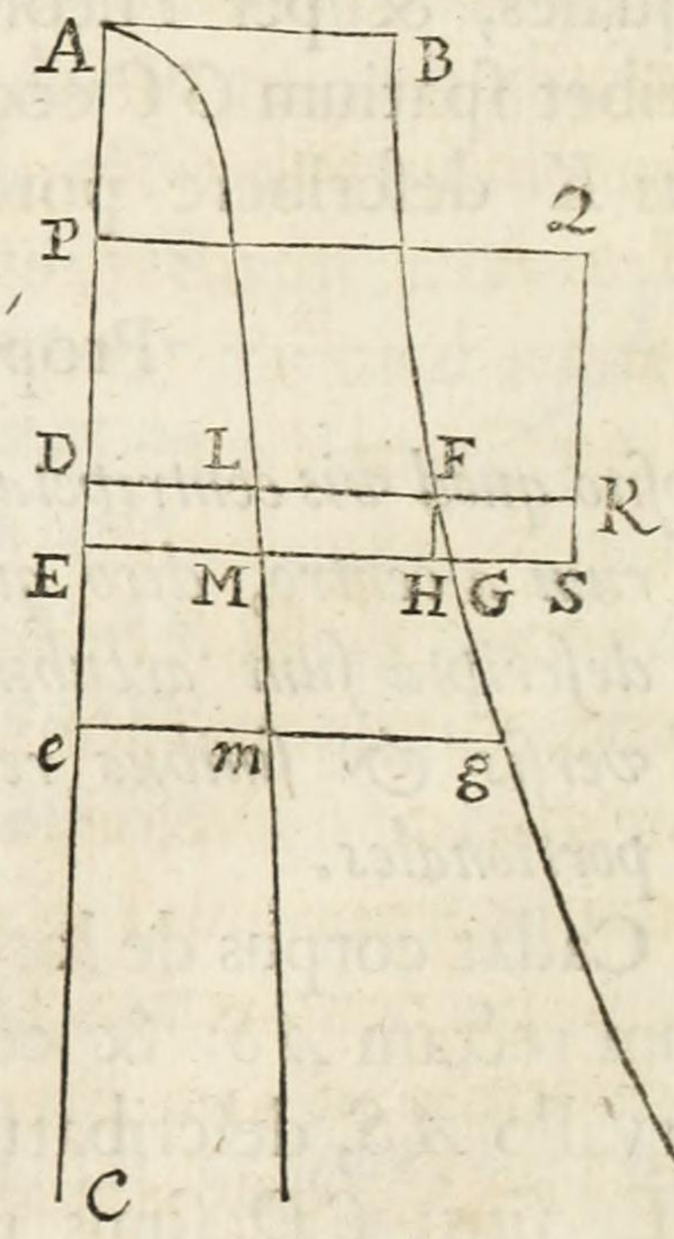
Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo provenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſq; centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

Prop. XXXIX. Prob. XXVII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deq; loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitq; *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. I.* In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & ſit *ALM* linea curva quam punctum *L* perpetuo tangit, & erit tempus quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME*. *Quod erat Inveniendum.*



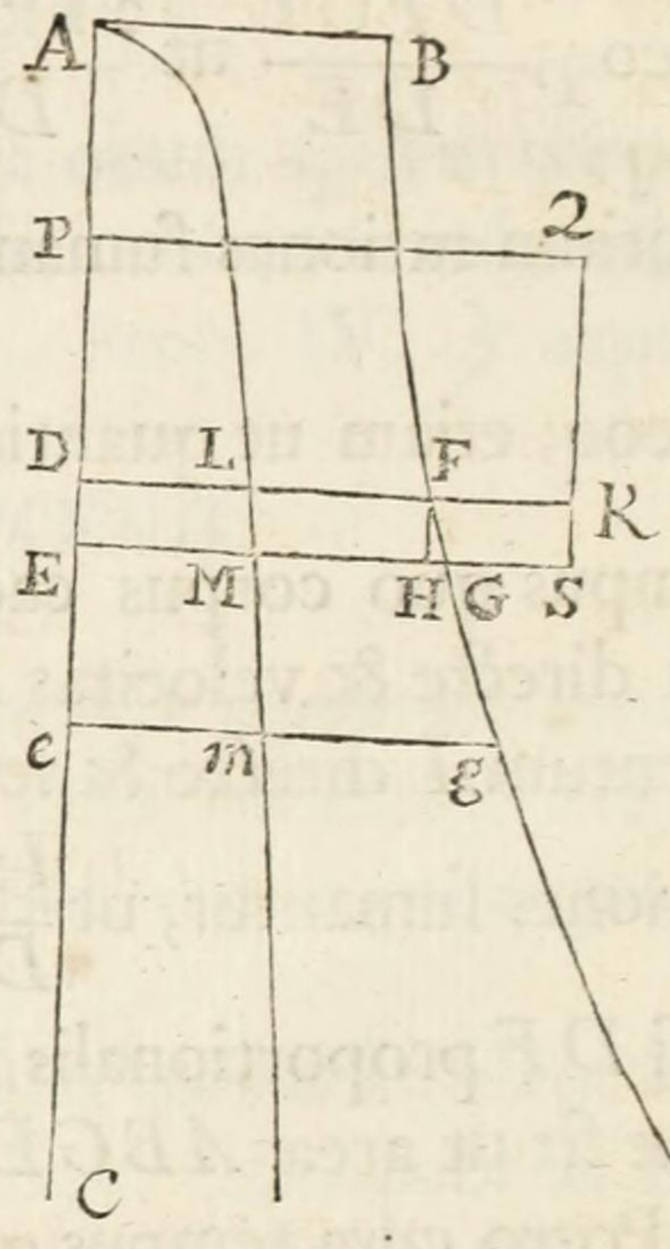
Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitq; *DLF* locus lineæ *EMG* ubi

ubi corpus verſabatur in D; & ſi ea ſit vis centripeta, ut area $ABGE$ latus quadratum ſit ut deſcendentis velocitas, erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in D & E ſcribantur V & $V+I$, erit area $ABFD$ ut V^2, & area $ABGE$ ut $V^2+2VI+I^2$, & diviſim area $DFGE$ ut $2VI+I^2$, adeoq; $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2I\times V+\frac{1}{2}I}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2I\times V}{DE}$, adeoq; etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I\times V}{DE}$. Eſt autem tempus quo corpus cadendo deſcribit lineolam DE, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtq; vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, adeoq; ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I\times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo DF. Ergo vis ipſi DF proportionalis facit corpus ea cum velocitate deſcendere quæ ſit ut areæ $ABGE$ latus quadratum Q. E. D.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE deſcribatur, ſit ut velocitas, adeoq; ut areæ $ABFD$ latus quadratum inverſe; ſitq; DL, atq; adeo area naſcens $DLME$, ut idem latus quadratum inverſe: erit tempus ut area $DLME$, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE deſcribitur ut area tota AME. Q. E. D.

Corol. 1. Si P ſit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi ui centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunq; cadens acquiſivit eodem loco D, & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ ſit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum $PDRQ$, eiq; æqualis abſcindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namq; completo rectangulo

$EDRS$, cum ſit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2V \times I$, adeoq; ut $\frac{1}{2}V$ ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintq; incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt ut ordinatim applicatæ DF, DR, adeoq; ut areæ naſcentes $DFGE$, $DRSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.



Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunq; D data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut eſt latus quadratum rectanguli $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel aucti, ſi locus e eſt loco D inferior, vel diminuti, ſi is ſuperior eſt, ad latus quadratum rectanguli ſolius $PQRD$, id eſt ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - DFge}$ ad $\sqrt{PQRD}$.

Corol. 3. Tempus quoq; innoteſcet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD + \text{vel} - DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namq; tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE in dimidiata ratione PD ad PE, id eſt (lineola DE jam-

jamjam naſcente) in ratione PD ad $PD+\frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD+DE$, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, adeoq; ut rectangulum $2PE$ x DL ad aream $DLME$; eſtq; tempus quo corpus utrumq; deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD$ x DL ad aream $DLme$.

SECT. VIII.

De Inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuſcunq; centripetis agitata revolventur.

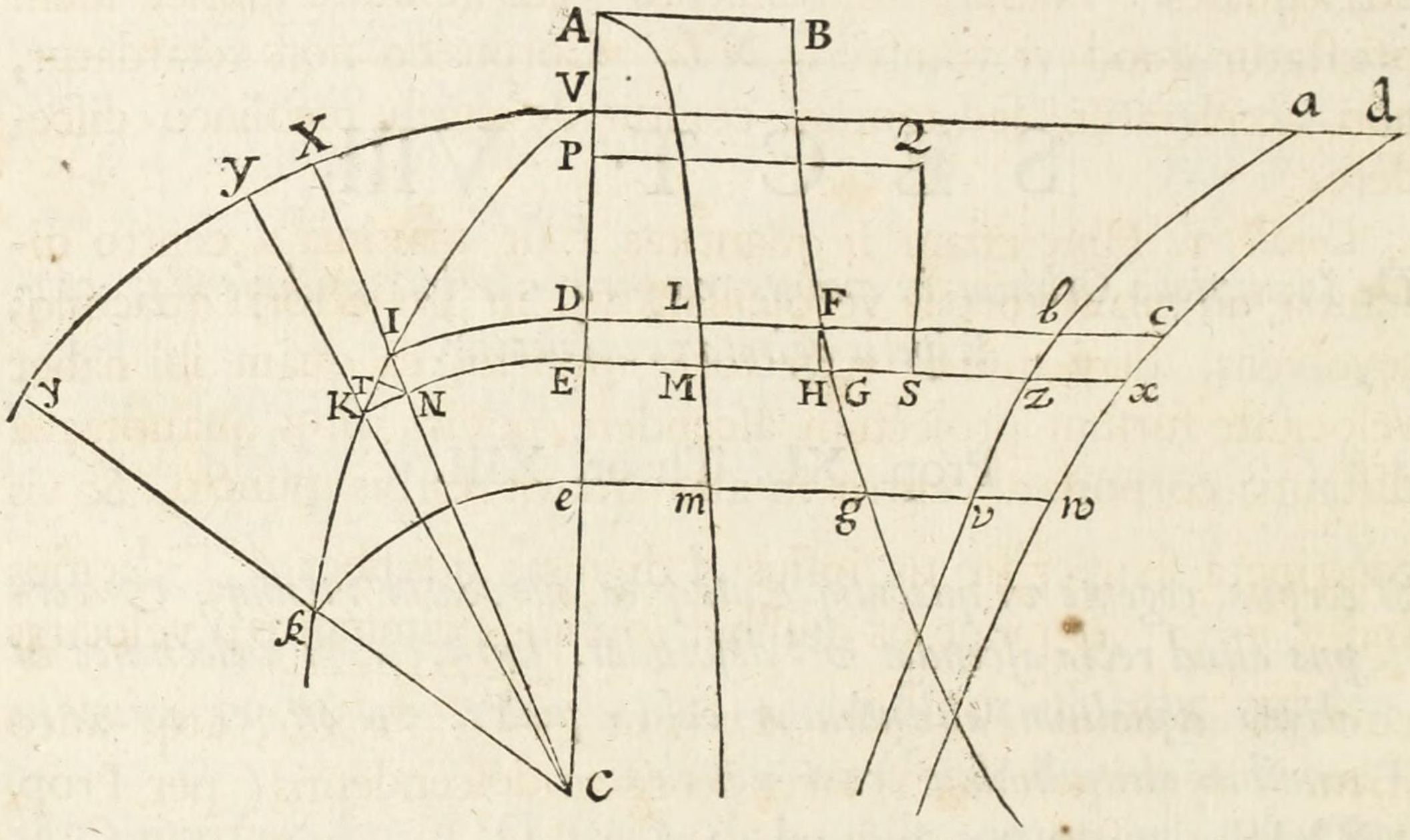
Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunq; centripeta, moveatur utcunq;, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintq; eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæq; VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitq; circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN, per Legum Corol. 2. reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam

NT

NT corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietq; ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Pro-



tæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, adeoq; accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & *IT* x *IK* rectangulum. Sed rectangulum *IT* x *IK* æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quadrato*; & propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K* & eodem argu-

gumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel funipendulum oſcilletur, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintq; velocitates eorum in eadem quacunq; altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunq; æqualibus altitudinibus æquales. Namq; impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

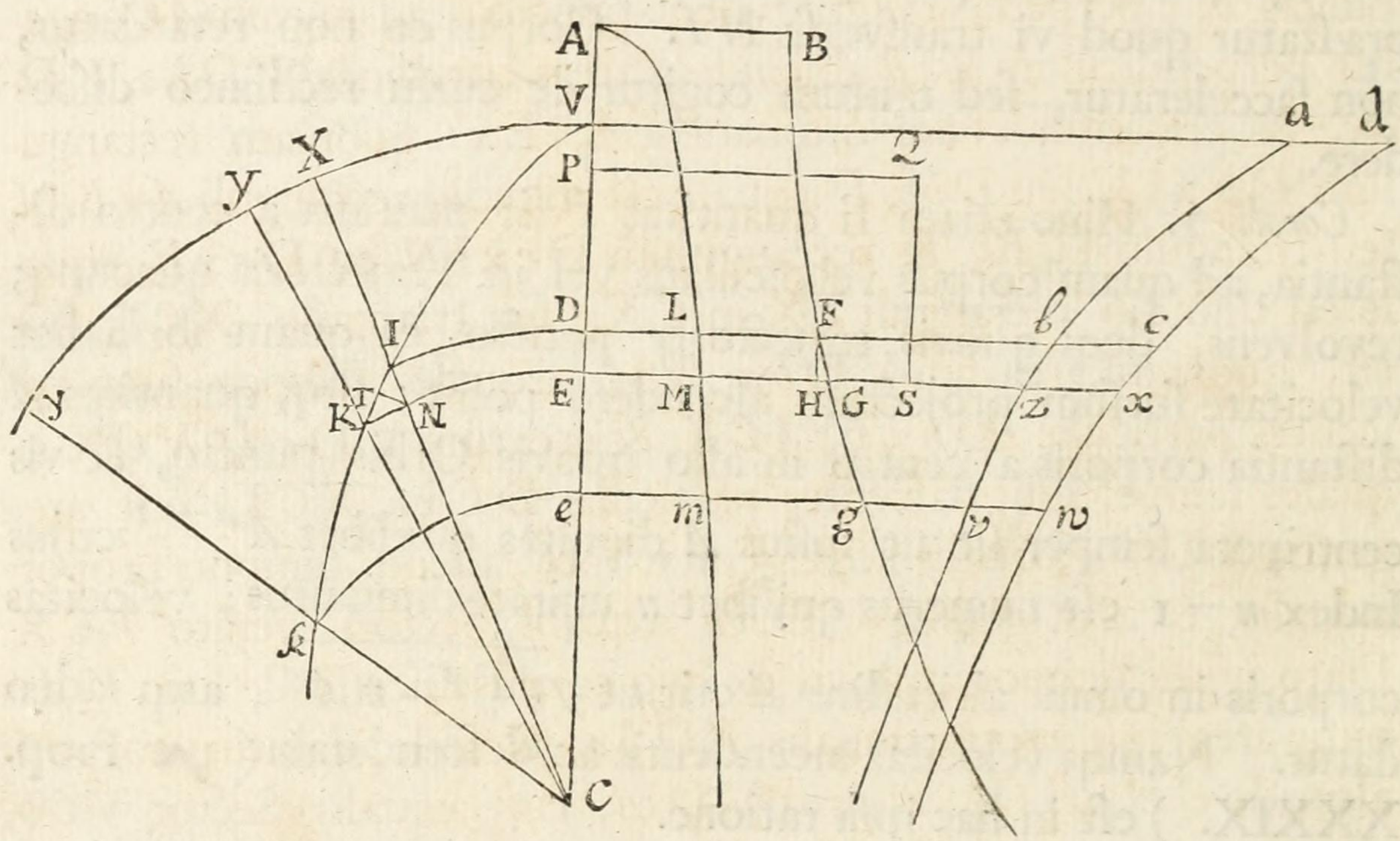
Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas *P* ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in Trajectoria quacunq; revolvens, deq; quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitq; quantitas *A* diſtantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius *A* dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ eſt numerus quilibet *n* unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$, atq; adeo datur. Namq; velocitas aicendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hac ipſa ratione.

Prop. XLI. Prob. XXVIII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda ſit Trajectoria *VITKk*. Detur circulus *VXY* centro *C* intervallo quovis *CV* deſcriptus, centroq; eodem deſcribantur alii quivis circuli *ID*,

KE trajectoriam ſecantes in *I* & *K* rectamq; *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* ſecantem circulos *KE*, *VΥ* in *N* & *X*, tum rectam *CKΥ* occurrentem circulo *VXΥ* in *Υ*. Sint autem puncta *I* & *K* ſibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *Υ* & *K* ad *k*; ſitq; *A* altitudo illa de qua corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, quoniam lineola *IK*, dato tempore quam minimo deſcripta, eſt ut velocitas atq; adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK*



tempori proportionale datur, adeoq; *KN* eſt reciproce ut altitudo *IC*, id eſt, ſi detur quantitas aliqua *Q*, & altitudo *IC* nominetur *A*, ut $\frac{Q}{A}$; quam nominemus *Z*. Ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius *Q* ut ſit $\surd ABFD$ in aliquo caſu ad *Z* ut eſt *IK* ad *KN*, & erit ſemper $\surd ABFD$ ad *Z* ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad *ZZ* ut *IK quad.* ad *KN quad.* & diviſim *ABFD*$-ZZ$ ad *ZZ* ut *IN quad.* ad *KN quad.* adeoq; $\surd \overline{ABFD-ZZ}$ ad *Z* ut *IN* ad *KN*, & propterea *A* x *KN* æquale

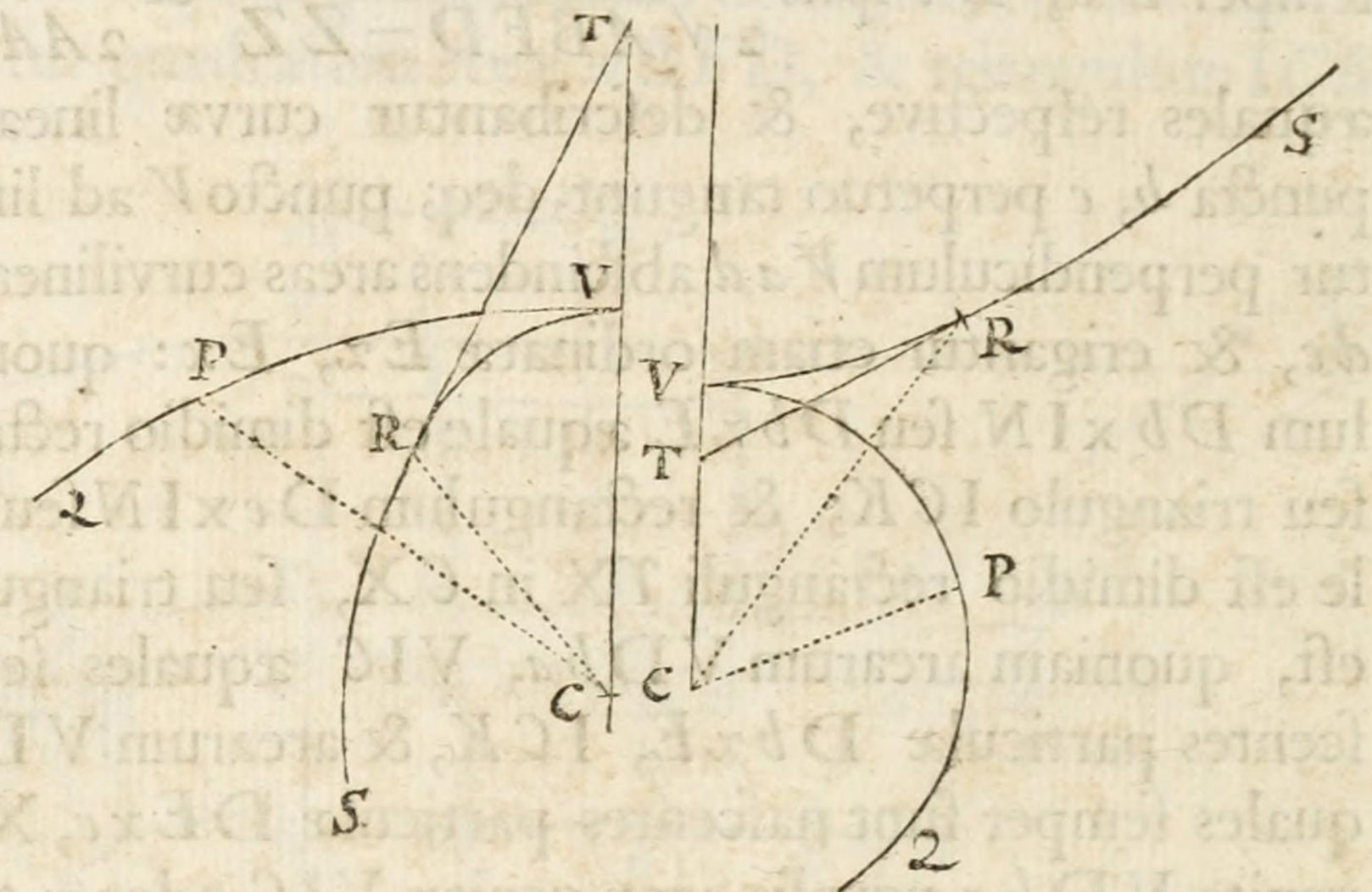
quale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $\Upsilon X \times XC$ ſit ad $A \times KN$ in duplicata ratione ΥC ad KC, erit rectang. $\Upsilon X \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ ab, cd quas puncta b, c perpetuo tangunt; deq; puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Vad abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDdc$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu $Dbz E$ æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$, ſeu triangulo ICK; & rectangulum $Dc \times IN$ ſeu $Dc \times E$ æquale eſt dimidio rectanguli ΥX in CX, ſeu triangulo $XC\Upsilon$; hoc eſt, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $Dbz E$, ICK, & arearum $VDcd$, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DExc$, $XC\Upsilon$, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, adeoq; tempori proportionalis, & area genita $VDdc$ æqualis Sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDcd$, eiq; æqualis Sector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq; corporum altitudines, id eſt Apſides Trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Incidunt enim Apſides in puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoq; ubi area $ABFD$ æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo Trajectoria alibi ſecat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur;

nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut *K N* ad I *K*, id eſt ut *Z* ad latus quadratum areæ *A B F D*.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet Conica V *R S*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *R T* occurrens axi infinite producto *C* V in puncto *T*; dein juncta *C R* ducatur recta *C P*, quæ æqualis ſit abſciſſæ *C T*, angulumq; V *C P*



Sectori V *C R* proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V juſta cum velocitate ſecundum lineam rectæ *C* V perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoq; ſi conica ſectio *C* V *R S* Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, ſi corpus quacunq; cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut incæperit vel oblique deſcendere ad centrum, vel ab eo oblique aſcendere, figura *C V R S* vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt Trajectoria augendo vel minuendo angulum *V C P* in data aliqua ratione. Sed et vi centripeta in centrifugam verſa, aſcendet corpus oblique in Trajectoria *V P Q* quæ invenitur capiendo angulum *V C P* Sectori Elliptico *C V R C* proportionalem, & longitudinem *C P* longitudini *C T* æqualem: ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex

Pro-

Propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem ut ſatis facilem brevitatis gratia miſſam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus Propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I ſecundum lineolam IT, ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco P cadendo acquirere poſſet in D: ſitq; hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus verſus k; centroq; C & intervallo Ck deſcribatur circulus ke occurrens rectæ PD in e,& erigantur curvarum $ALMm$,$BFGg$,$abzv$ $dcxw$ ordinatim applicatæ em, eg, ev, ew. Ex dato rectangulo $PDRQ$, dataq; lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per conſtructionem Problematis XXVII. & ejus *Corol.* 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio naſcentium IK, KN, & inde, per conſtructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis $abzv$, $dcxw$: adeoq; completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck, tum area $Dcwe$, eiq; æqualis Sector XCy, angulusq; XCy & locus k in quo corpus tunc verſabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his Propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem a centro variari ſecundum legem quamcunq; quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem a centro diſtantiis eſſe undiq; eandem. Atq; hactenus corporum in Orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

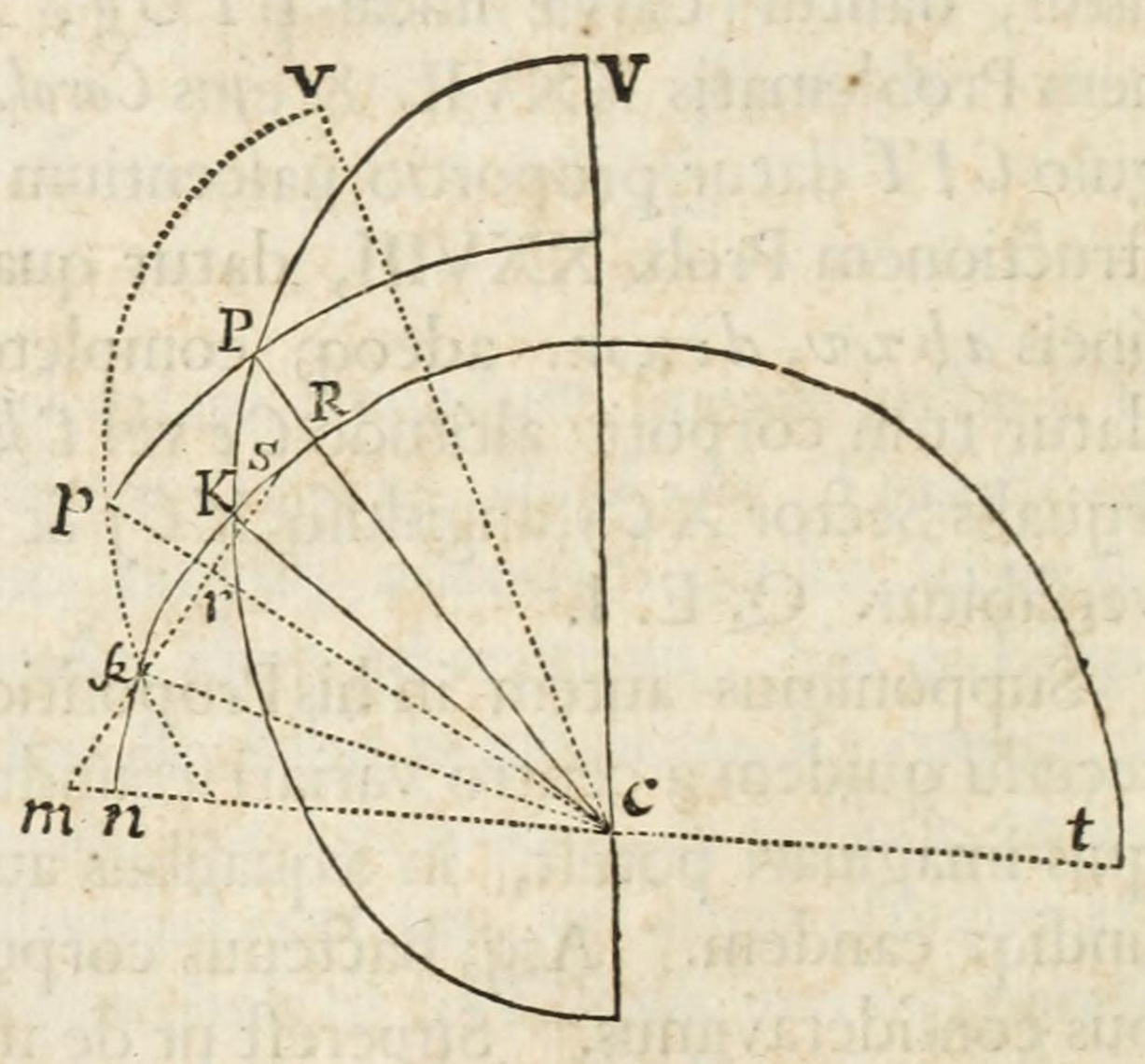
SECT. IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deq; motu Apſidum.

Prop. XLIII. Prob. XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in Trajectoria quacunq; circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atq; corpus aliud in eadem Trajectoria quieſcente.

In Orbe *V P K* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *C p*, quæ ſit ipſi *C P* æqualis, angulumq; *V C p* angulo *V C P* proportionalem conſtituat ;& area quam linea *C p* deſcribit erit ad aream *V C P* quam linea *C* P deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *C p* ad velocitatem lineæ deſcribentis *C P*; hoc eſt, ut angulus *V C p* ad angulum V*C P*, adeoq; in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *C p* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus V *C v* angulo *P C p*, & linea *C v* lineæ



neæ CV, atq; figura vCp figuræ VCP æqualis, & corpus in p ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis vCp, eodemq; tempore deſcribet arcum ejus vp quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem VP in figura quieſcente VPK deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per Corollarium Propoſitionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi poſſit in curva illa linea quam punctum p deſcribit in plano immobili, & ſolvetur Problema. Q. E. F.

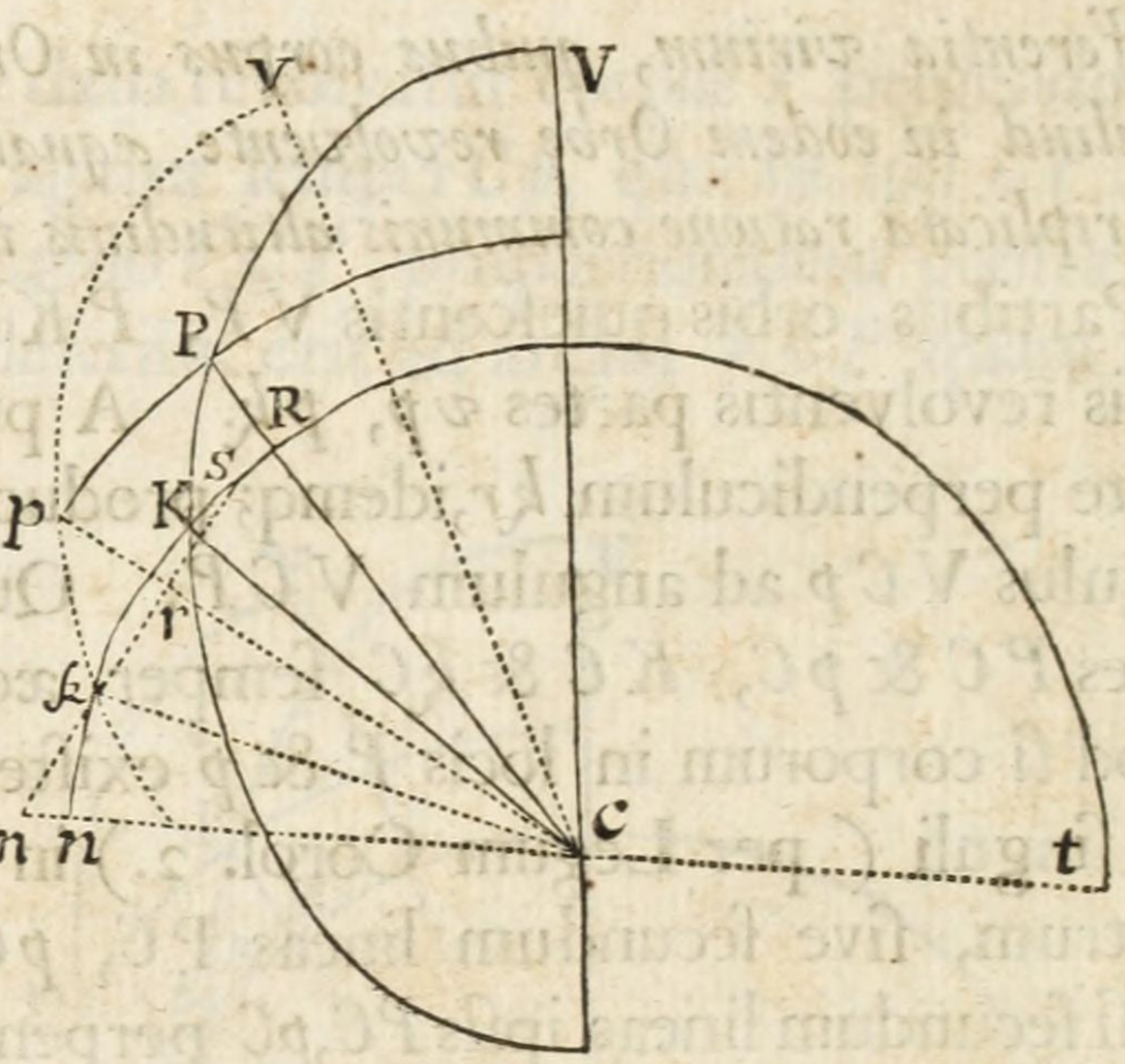
Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicata ratione communis altitudinis inverſe.

Partibus orbis quieſcentis VP, PK ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes vp, pk. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr, idemq; produc ad m, ut ſit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines PC & pC, KC & kC ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod ſi corporum in locis P & p exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per Legum Corol. 2.) in binos, (quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas PC, pC; alteri prioribus tranſverſi ſecundum lineas ipſis PC, pC perpendiculares determinantur) motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis p erit ad motum tranſverſum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, id eſt ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroq; pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a P verſus C, adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum acquirit a linea PC, ut eſt hujus motus tranſverſus ad motum

tranſ-

transversum alterius. Quare cum kr æqualis sit distantiæ quam corpus alterum acquirit a linea pC, sitq; mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P, manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita se habebunt ubi corpora P & p æqualiter secundum lineas pC & PC moventur, adeoq; æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut est angulus VCp ad angulum VCP, sitq; nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoq; vi majore urgetur, si modo angulus mCp angulo kCp major est, id est si orbis Vpk movetur in consequentia, & minore, si orbis regreditur; estq; virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligetur circulus secans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoq; mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, sunt kr & mr, earumq; differentia mk & summa ms reciproce ut altitudo pC, adeoq; rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC. Est & mt directe ut $\frac{1}{2}mt$, id est ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est



eſt lineola naſcens mn, eiq; proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k eſt ad vim qua corpus motu circulari revolvi poſſet ab r ad k, eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut $Gq. - Fq.$ ad $Fq.$ Et propterea, ſi centro C intervallo quovis CP vel Cp deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit, differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area VPC, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut $Gq. - Fq.$ ad $Fq.$ Namq; ſector ille & area pCk ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK Ellipſis ſit umbilicum habens C & Apſidem ſummam V; eiq; ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis vpk, ita ut ſit ſemper pc æqualis PC, & angulus VCp ſit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pc ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur $2R$: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{Acub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{Fq.}{Aq.}$, & vis in V erit $\frac{Fq.}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad diſtantiam CV ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide V, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad circuli ſemidiametrum CV, adeoq; valet $\frac{RFq.}{CV\ cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut $Gq. - Fq.$

ad

ad $Fq.$, valet $\frac{RGq. - RFq.}{CV\,cub.}$: eſtq; hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium quibus corpus P in Ellipſi immota VPK, & corpus p in Ellipſi mobili vpk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\,cub.}$ ad $\frac{1}{CV\,cub.}$, eadem differentia in omne altitudine A valebit $\frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$. Igitur ad vim $\frac{Fq.}{Aq.}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili VPK, addatur exceſſus $\frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ & componetur vis tota $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ qua corpus in Ellipſi mobili vpk iiſdem temporibus revolvi poſſit.

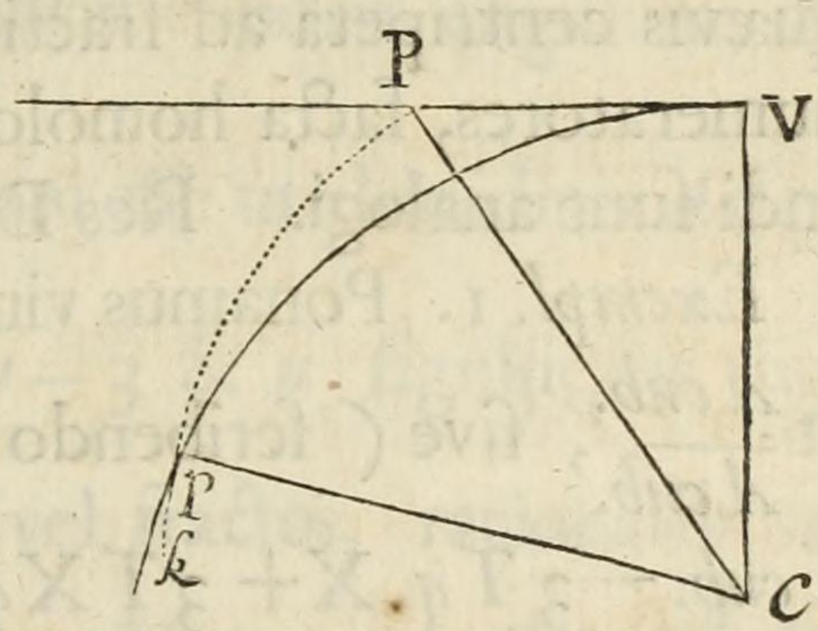
Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis VPK Ellipſis ſit centrum habens in virium centro C; eiq; ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis vpk, ſitq; $2R$ Ellipſeos hujus latus rectum, & $2T$ latus tranſverſum, atq; angulus VCp ſemper ſit ad angulum VCP ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{Fq.\,A}{T\,cub.}$ & $\frac{Fq.\,A}{T\,cub.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ reſpective.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima CV nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis VPK habet in V, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunq; immobili VPK revolvi poteſt, in loco V dicatur $\frac{Fq.}{Tq.}V$, atq; aliis in locis P indefinite dicatur X, altitudine CP nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli VCp ad angulum VCP: erit vis centripeta qua corpus idem eoſdem motus in eadem Trajectoria vpk circulariter

riter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGq. - VRFq.}{A cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturq; *PC*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Est autem hæc Curva *Vpk* eadem cum Curva illa *VPQ* in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.



Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipsi mobili, ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3. revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se

collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* Apsis summa, & scribantur *T* pro altitudine maxima C*V*, *A* pro altitudine quavis alia *C P* vel *C p*, & *X* pro altitudinum differentia C V − C *P*; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum ejus C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ id est ut $\frac{Fq.\,A + RGq. - RFq.}{A\,cub.}$, substituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X}{A\,cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit *A cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoq; ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3Tq.X + 3TXq. - X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $T\,cub.$ ut $- Fq.X$ ad $- 3Tq.X + 3TXq. - X\,cub.$ sive ut $- Fq.$ ad $- 3Tq. + 3TX - Xq.$ Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atq; X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt $RGq.$ ad $T\,cub.$ ut $- Fq.$ ad $- 3Tq.$ seu $Gq.$ ad $Tq.$ ut $Fq.$ ad $3Tq.$ & vicissim *G quadrat.* ad *F quadrat.* ut T *quad.* ad 3 T *quad.* id est, ut 1 ad 3; adeoq; G ad F, hoc est angulus *V C p* ad angulum V *C P*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum V *C P* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atq; adeo in orbe immobili de quo agimus, ab Absside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum V *C p* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id

adeo

adeo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta deſcribit, & orbis illius quem corpus in Ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter, ſed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter Apſidem ſummam & Apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 *gr.* 55 *m.* ad centrum; perveniens ab Apſide ſumma ad Apſidem imam, ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad Apſidem ſummam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum, & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunq; integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T-X}^n$ in ſeriem indeterminatam per Methodum noſtram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} X\,q.T^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$, fit $RGq. - RFq. + TFq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $RGq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu $Gq.$ ad T^{n-1} ut $Fq.$ ad nT^{n-1}, & viciſſim $Gq.$ ad $Fq.$ ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; adeoq; G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu cor-

poris ab Apſide ſumma ad Apſidem imam in Ellipſi confectus, ſit graduum 180, conficietur angulus VCp, in deſcenſu corporis ab Apſide ſumma ad Apſidem imam in Orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apſide ima ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis a centro, id eſt ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{4}$ æqualis 2; adeoq; angulus inter Apſidem ſummam & Apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu *90gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apſidem imam, & completa alia quarta parte ad Apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propoſitione X. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia, id eſt directe ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit $n = 2$, adeoq; inter Apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 *gr.* 17 *min.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apſide ſumma ad imam & ab ima ad ſummam perveniet in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciproce ut Latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis Altitudinis, id eſt reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoq; directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ ſeu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apſide ſumma diſcedens & ſubinde perpetuo deſcendens, perveniet ad Apſidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Ex-

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$, id est ut $\frac{b\,in\,\overline{T-X}^m + c\,in\,\overline{T-X}^n}{A\,cub.}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut $\frac{bT^m - mbXT^{m-1} + \frac{mm-m}{2}bX^2T^{m-2} + cT^n - ncXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}cX^2T^{n-2}\,\&c.}{A\,Cub.}$ & collatis numeratorum terminis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-Fq.$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}XT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $Gq.$ ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut $Fq.$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim $Gq.$ ad $Fq.$ ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T Arithmetice per unitatem, fit $Gq.$ ad $Fq.$ ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoq; ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus VCp inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\,cub.}$, angulus inter Apsides invenietur $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$ graduum. Nec secus resolvetur Problema in casibus

ſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes *A cub.* Dein pars data Numeratoris hujus $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$ ad partem non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoq; unitatem pro *T*, obtinebitur proportio *G* ad *F*.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur *A*: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus Index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per Exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deq; Apſide diſcedens, ſi cæperit deſcendere, nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſq; ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud de Apſide diſcedens vel minimum aſcendere, aſcendet in infinitum, neq; unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis in receſſu a centro decreſcit in majori quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cæperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſq; vel aſcendet in infinitum. At ſi vis in receſſu a centro vel decreſcat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunq; Corpus nunquam deſcendet ad centrum uſq; ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum, Vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in

mino-

minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit, hoc eſt, ſi fuerit *m* ad *n* ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoq; $\frac{nn}{mm} - 3$ ualeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$, erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id eſt reciproce ut $A3-\frac{1}{64}$ vel $A3-\frac{1}{16}$ vel $A3-\frac{1}{4}$ vel $A3-\frac{4}{9}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam, erit *m* ad *n* ut 1 ad 1, adeoq; $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{A^2}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit, erit *m* ad *n* ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoq; $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel $A9-3$ vel $A^{16}-3$, & propterea Vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13}. Deniq; ſi Corpus pergendo ab Apſide ſumma ad Apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoq; Apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in Conſequentia gradus tres, erit *m* ad *n* ut 363*gr.* ad 360*gr.* adeoq; $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{2}{1}\frac{6}{3}\frac{5}{1}\frac{7}{7}\frac{0}{6}\frac{7}{9}}$, & propterea Vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{2}{1}\frac{6}{3}\frac{5}{1}\frac{7}{7}\frac{0}{6}\frac{7}{9}}$ ſeu $A^{2\,2\frac{4}{+}3}$. Decreſcit igitur Vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ vicibus $60\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per Exempla ter-

tertia) motus Apſidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in Ellipſi ſit ut $\frac{1}{A^2}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoq; vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A^3}$; erit (in Exemplis tertiis) A æqualis 1 & n æqualis 4, adeoq; angulus revolutionis inter Apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam eſſe 357,^{45} vicibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{357}$, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{56}{55}\frac{45}{34}\frac{5}{5}}$ ſeu 180,^{7602}, id eſt 180*gr.* 45*m.* 37*ſ.* Igitur corpus de Apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180*gr.* 45*m.* 37*ſ.* perveniet ad Apſidem imam, & hoc motu duplicato ad Apſidem ſummam redibit: adeoq; Apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1*gr.* 31*m.* 14*ſ.*

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunq; datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunq; centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quaſq; tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SEC.

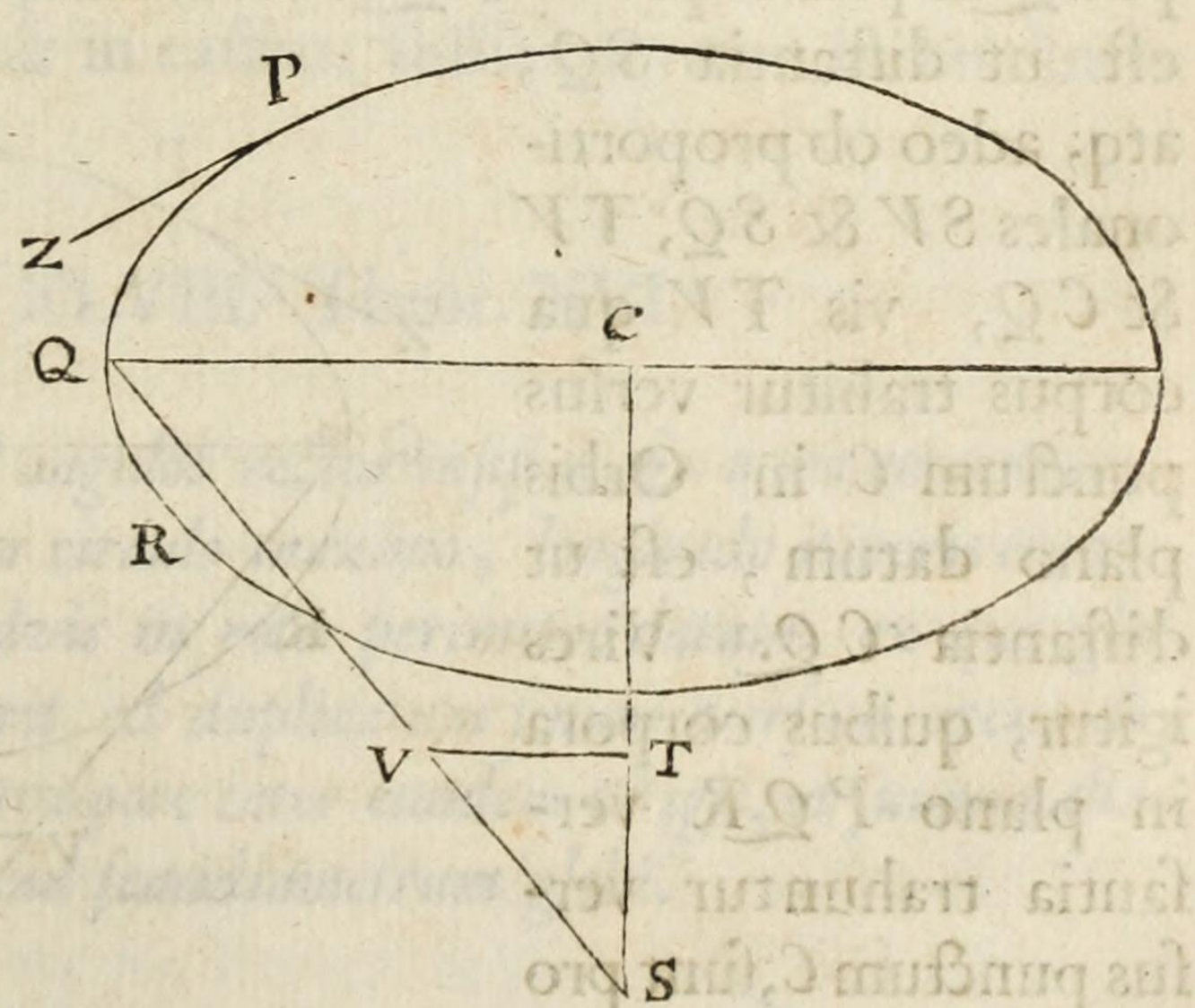
SECT. X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deq; Funipendulorum Motu reciproco.

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta, datoq; tum virium centro tum plano quocunq; in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum Rectam in Plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, *SC* distantia minima centri hujus a plano dato, *P* corpus de loco *P* secundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & *PQR* Trajectoria illa in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ* *QS*, & si in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum *S*, & agatur *VT* quæ sit parallela *CQ* & occurrat *SC* in *T*:



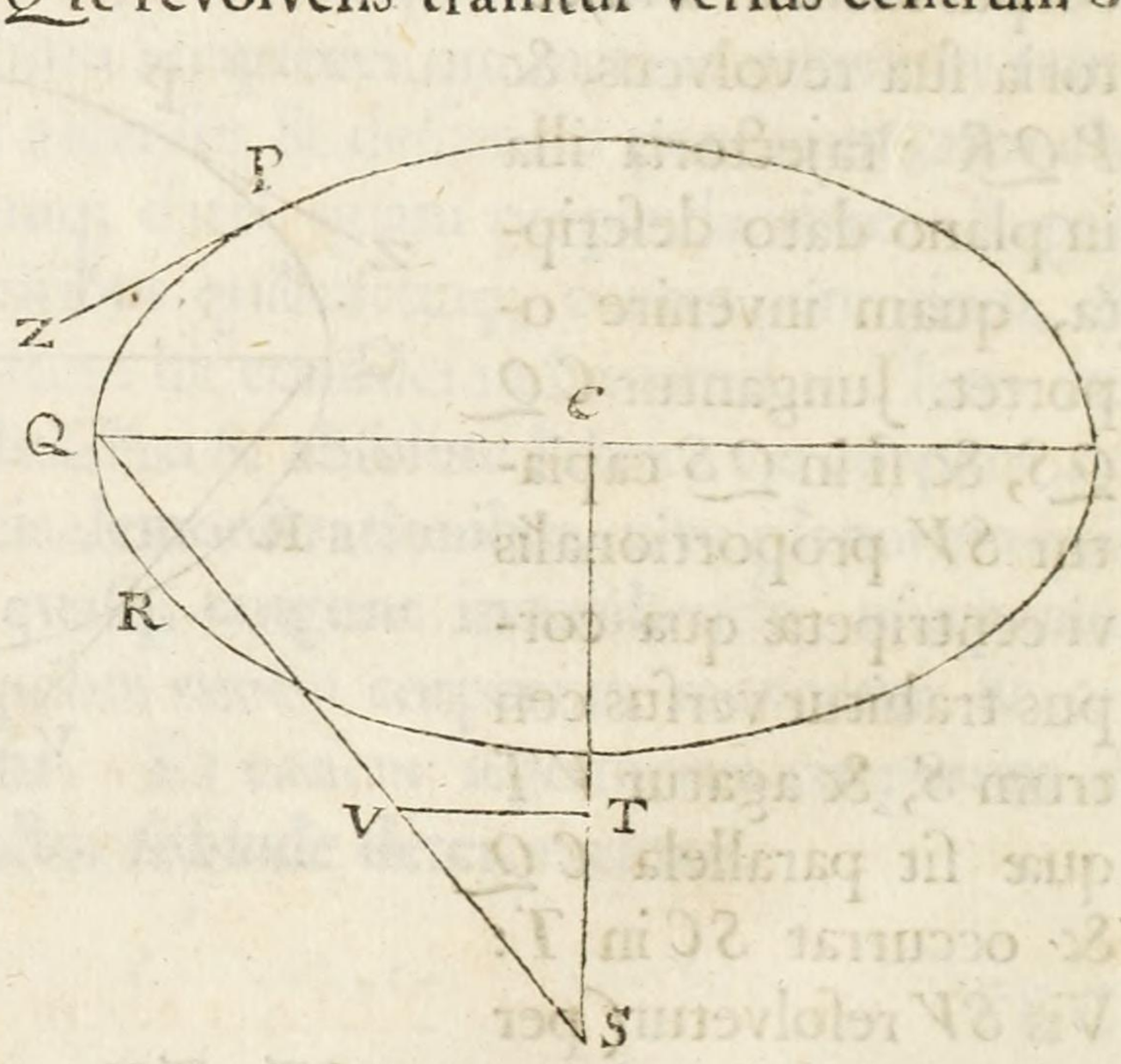
Vis *SV* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires *ST*, *TV*; quarum *ST* trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum *C* in plano

datum, adeoq; facit illud in hoc plano perinde moveri ac ſi vis *ST* tolleretur, & corpus vi ſola *TV* revolveretur circa centrum *C* in ſpatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in ſpatio libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur per Prop. XLII. tum Trajectoria *PQR* quam corpus deſcribit, tum locus *Q* in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum deniq; velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. Q. E. I.

Prop. XLVII. Theor. XV.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunq; revolventia deſcribent Ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæq; moventur in lineis rectis ultro citroq; diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.

Nam ſtantibus quæ in ſuperiore Propoſitione; vis *SV* qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur verſus centrum *S* eſt ut diſtantia *SQ*; atq; adeo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV* qua corpus trahitur verſus punctum *C* in Orbis plano datum, eſt ut diſtantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* verſantia trahuntur verſus punctum *C*, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus



corpora undiquaq; trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus in iiſdem figuris in plano quo-

quovis *PQR* circa punctum *C*, atq; in ſpatiis liberis circa centrum *S*, adeoq; (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.)temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroq; in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circa axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendendo currant ultro citroq; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atq; adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

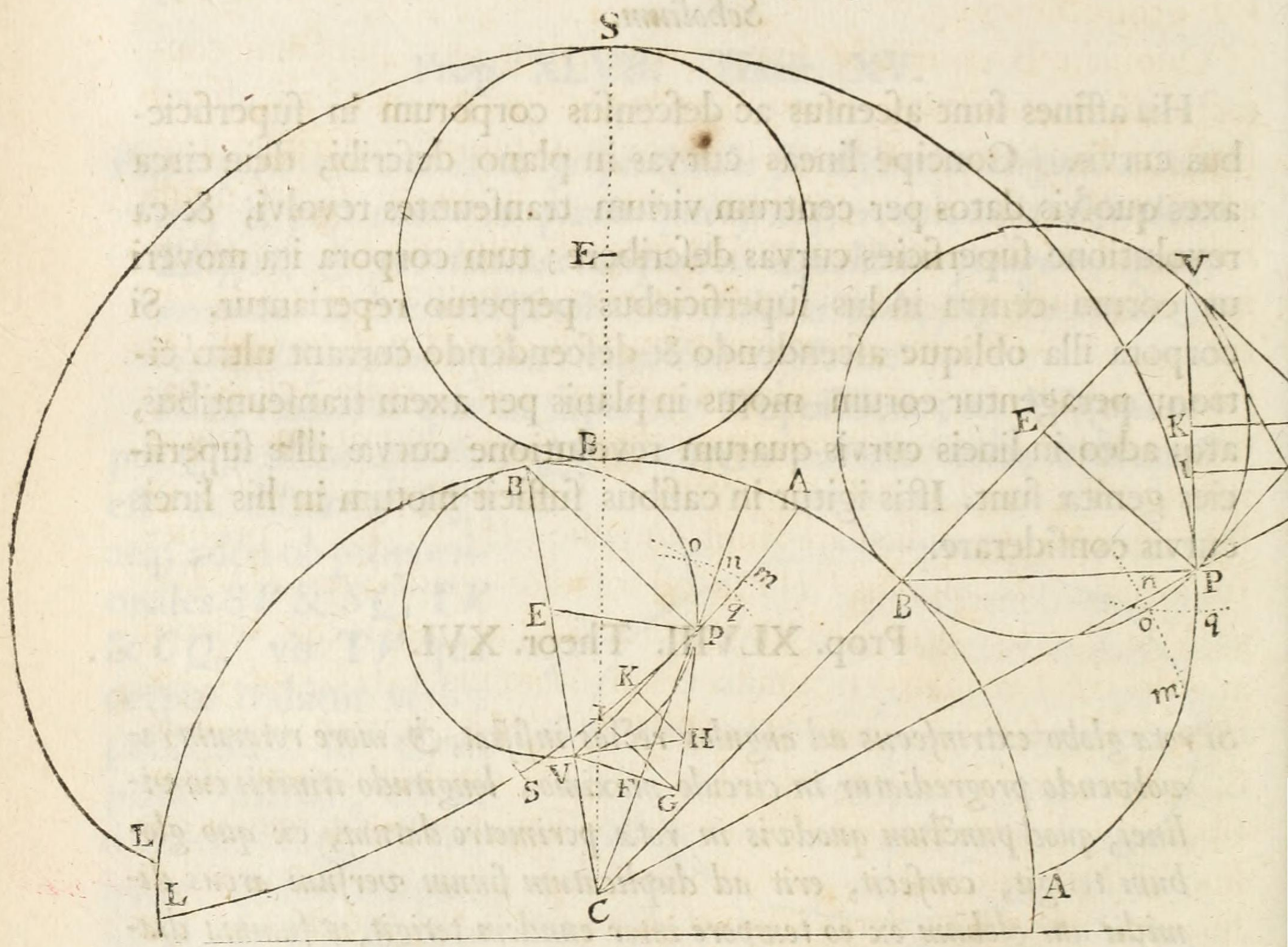
Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei

quod punctum quodvis in Rotæ Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei inſiſtens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo



ABL ab *A* per *B* verſus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* ſibi invicem ſemper æquentur, atq; punctum illud *P* in Perimetro rotæ datum interea deſcribere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea deſcripta ex quo Rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum ſinum verſum arcus ½ *PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (ſi

opus

opus eſt producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturq; *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur Normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, ſecetq; *PH* ipſam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur Normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o* & viam curvilineam *AP* in *m*, centroq; *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad lineam illam curvam *AP*, quam Rotæ punctum *P* deſcribit, atq; adeo quod recta V*P* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus æquetur tandem diſtantiæ *CP*, & obſimilitudinem figuræ evaneſcentis *Pnomq* & figuræ *PFG*V*I*, ratio ultima lineolarum evaneſcentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id eſt ratio incrementorum momentaneorum curvæ *AP*, rectæ *CP* & arcus circularis *BP*, ac decrementi rectæ V*P*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* reſpective. Cum autem V*F* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares ſunt, anguliq; *HVG*, *VCF* propterea æquales ; & angulus *VHP*, (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad V & *P* rectos,)complet angulum V*EP* ad duos rectos, adeoq; angulo *CEP* æqualis eſt, ſimilia erunt triangula V*HG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* ſeu *HP*, & ita *KI* ad *KP*, & diviſim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis conſequentibus ut *CB* ad 2*CE* ita *PI* ad *PV*. Eſt igitur decrementum lineæ *VP*, id eſt incrementum lineæ *BV*—*VP*, ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2*CE*, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines *BV*—*VP* & *AP* incrementis illis genitæ ſunt in eadem ratione. Sed exiſtente *BV* radio, eſt *VP* coſinus anguli *VPB* ſeu ½*BEP*, adeoq; *BV*—*VP* ſinus verſus ejuſdem anguli, & propterea in hac Rota cujus radius eſt ½*BV*, erit *BV*—V*P* duplus ſinus verſus arcus ½*BP*. Ergo *AP* eſt ad duplum ſinum verſum arcus ½*BP* ut 2*CE* ad *CB*. Q. E. D.

Li-

Lineam autem *AP* in Propoſitione priore Cycloidem extra Globum, alteram in poſteriore Cycloidem intra Globum diſtinctionis gratia nominabimus

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra *ASL* & biſecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus eſt ſinus anguli *VBP*, exiſtente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad Rotæ diametrum *BV* ut 2 *CE* ad *CB*.

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa eſt ut rectangulum *BEC*, ſi modo Globi detur ſemidiameter.

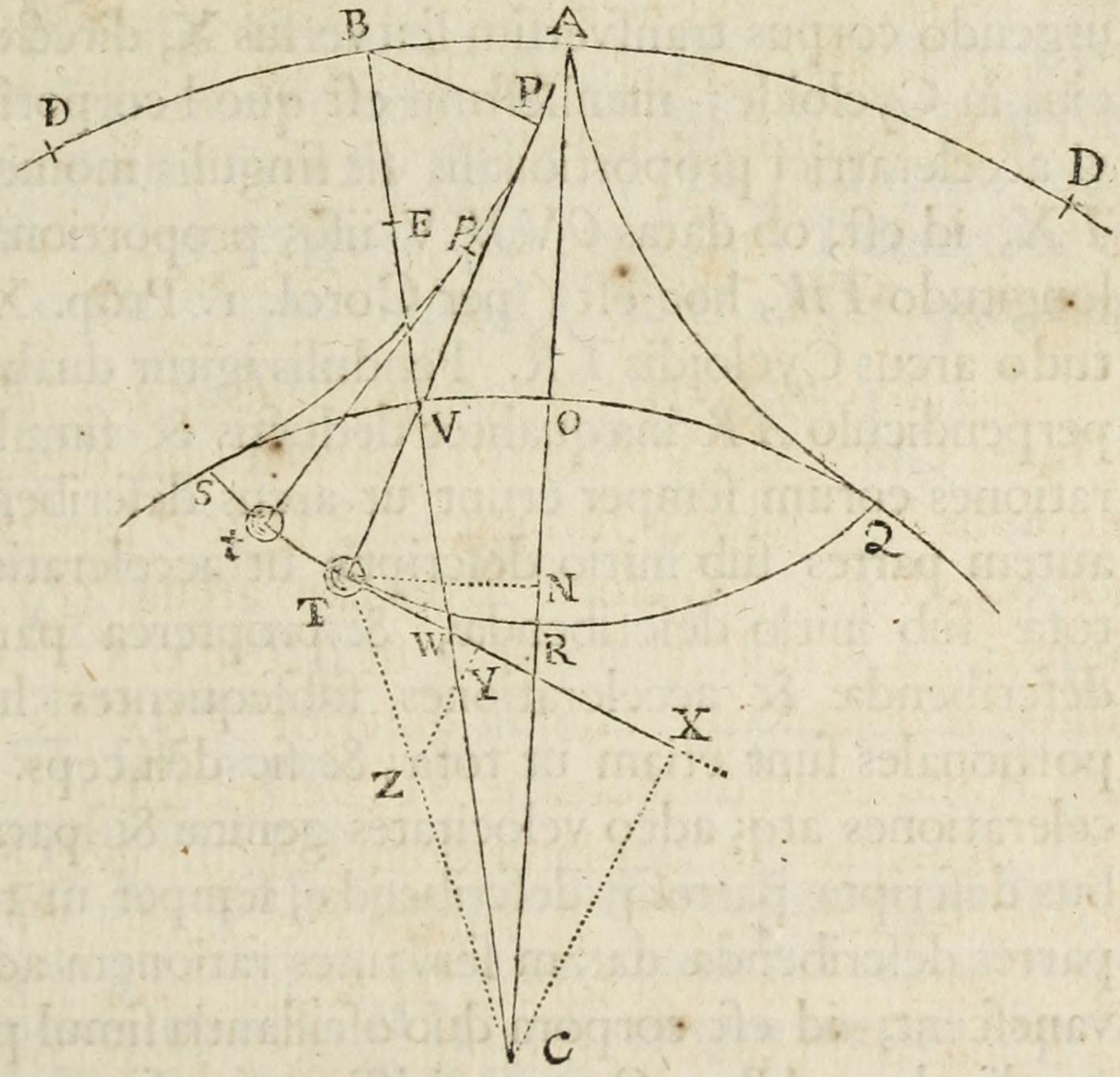
Prop. L. Prob. XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oſcilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS* centro *C* deſcriptum detur Cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* deſcribatur Globus exterior *ABD*, & intra hunc globum Rota, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra ſemicycloides *AQ*, *AS* oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte ſui ſuperiore *AP* applicetur ad ſemicycloidem illam *APS*, verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteq; reliqua *PT* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oſcillabitur in Cycloide data *QRS*. Q. E. F.

Occurrat enim filum *PT* tum Cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in V, agaturq; *CV* occurrens circulo *ABD* in *B*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac T, erigantur per-

perpendicula PB, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet enim ex geneſi Cycloidis, quod perpendicula illa PB, TW abſcindent de CV longitudines VB, VW rotarum diametris OA, OR æquales, atq; adeo quod punctum B incidet in circulum ABD. Eſt igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}$ BV radio) ut BW ad BV, ſeu $AO+OR$ ad AO, id eſt (cum ſint CA ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales,) ut $CA+CO$ ſeu $2CE$ ad CA. Proinde per Corol. 1. Prop. XLIX. longitudo PT æquatur Cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur Cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt (per Corollar. 2. Prop. *XLIX* longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide QRS. Q. E. D.



Corol. Filum AR æquatur Cycloidis arcui dimidio APS.

Prop. LI. Theor. XVIII.

Si vis centripeta tendens undiq; ad Globi centrum C ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſq; a centro, & hac ſola vi agente Corpus T oſcil-

oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloidis QRS: dico quod oſcillationum utcunq; inæqualium æqualia erunt Tempora

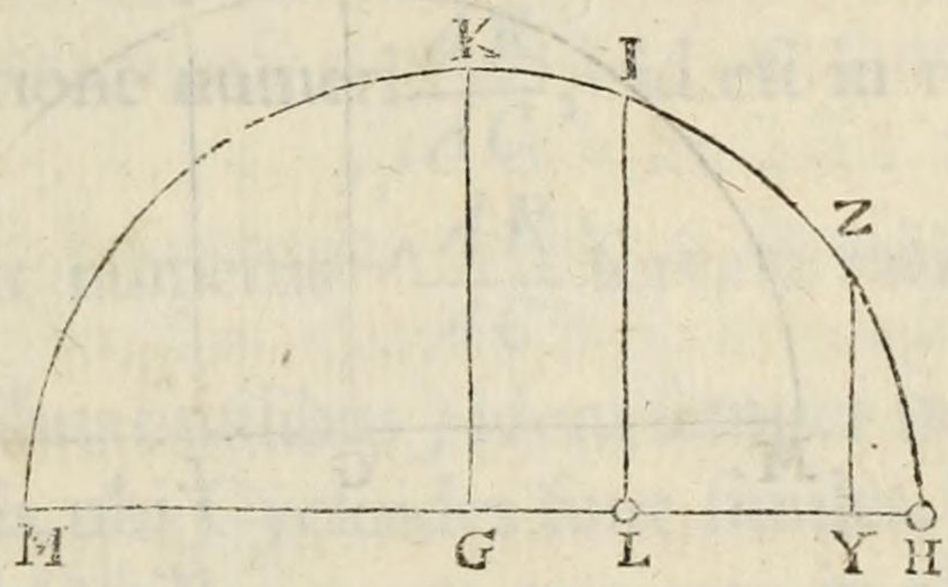
Nam in Cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus *T* impellitur verſus *C* eſt ut diſtantia *CT*, (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* diſtendit filum *PT* & per cujus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum ; pars autem altera *TX* urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus X, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio huic vi acceleratrici proportionalis ſit ſingulis momentis ut longitudo *TX*, id eſt, ob datas *CV*, *WV* iiſq; proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc eſt (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis *TR*. Pendulis igitur duabus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes , hoc eſt ut totæ ſub initio deſcribendæ, & propterea partes quæ manent deſcribendæ & accelerationes ſubſequentes his partibus proportionales ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes atq; adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſq; deſcribendæ, ſemper ut totæ ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumq; viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atq; adeo temporibus æqualibus fieri ; & propterea cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumq; perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. Q. E. D.

Prop.

Prop. LII. Prob. XXXIV.

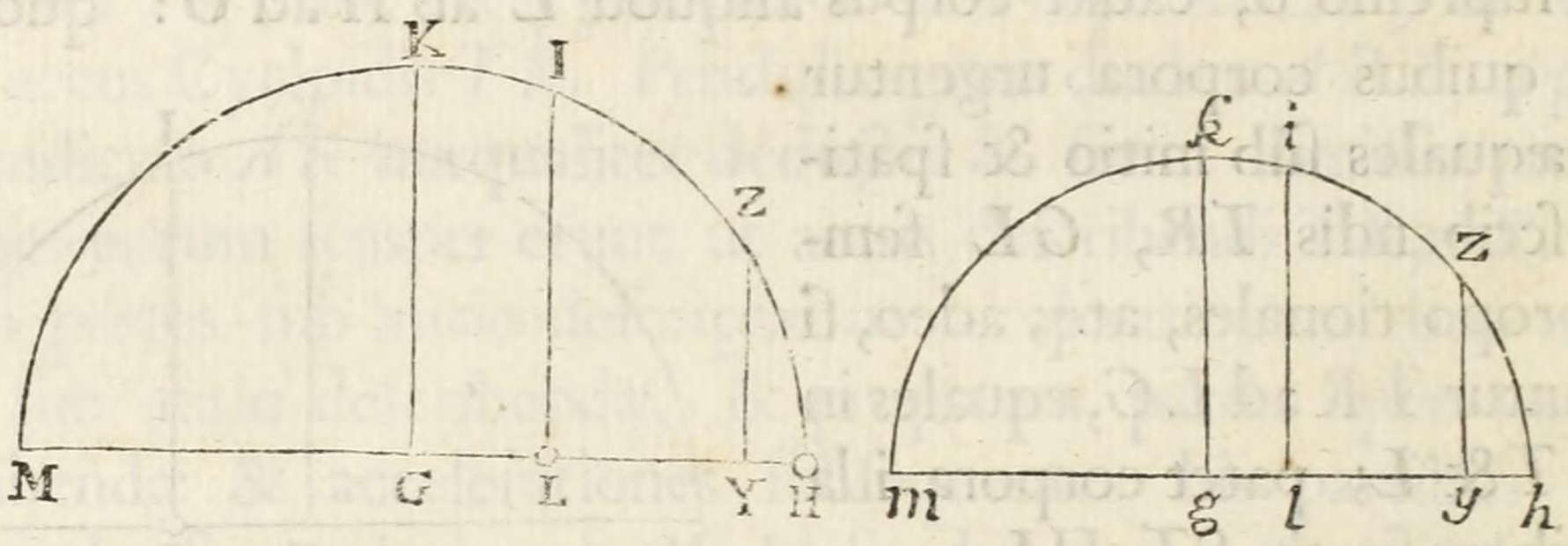
Definire & velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & Tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, deſcribe ſemicirculum *HKMG* ſemidiametro *GK* biſectum. Et ſi vis centripeta diſtantiis locorum a centro proportionalis tendat ad centrum *G*, ſitq; ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L. & LI.) ad ipſius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco ſupremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis *TR*, *GL* ſemper proportionales, atq; adeo, ſi æquantur *TR* ad *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa deſcribere ſpatia *ST*, *HL* æqualia ſub initio, adeoq; ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus deſcribit arcum *ST* eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus *HI* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*) ad ſemicirculum *HKM* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*.) Et velocitas corporis penduli in loco *T* eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo *R*, (hoc eſt velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, ſeu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, ſive ut $\sqrt{SK\,q. - TK\,q.}$ ad *SR*. Unde cum in Oſcillationibus inæqualibus deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis Oſcillationum arcubus proportionales, habentur ex datis



temporibus & velocitates & arcus deſcripti in Oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.

Oſcillentur jam funipendula duo corpora in Cycloidibus inæqualibus & earum ſemiarcubus æquales capiantur rectæ GH, gh, centriſq; G, g & intervallis GH, gh deſcribantur ſemicirculi $HZKM$, $hzkm$. In eorum diametris HM, hm capiantur lineolæ æquales $H\Upsilon$, $h\upsilon$, & erigantur normaliter ΥZ, υz circumferentiis occurrentes in Z & z. Quoniam corpora pendula ſub initio motus verſantur in circumferentia globi QOS, adeoq; a viribus æqualibus urgentur in centrum, incipiuntq; directe verſus centrum moveri, ſpatia ſimul confecta æqualia erunt ſub initio. Urgeantur igitur corpora H, h a viribus iiſdem in H & h, ſintq;



$H\Upsilon$, $h\upsilon$ ſpatia æqualia ipſo motus initio deſcripta, & arcus HZ, hz denotabunt æqualia tempora. Horum arcuum naſcentium ratio prima duplicata eſt eadem quæ rectangulorum $GH\Upsilon$, $gh\upsilon$, id eſt, eadem quæ linearum GH, gh; adeoq; arcus capti in dimidiata ratione ſemidiametrorum denotant æqualia tempora. Eſt ergo tempus totum in circulo HKM, Oſcillationi in una Cycloide reſpondens, ad tempus totum in circulo hkm Oſcillationi in altera Cycloide reſpondens, ut ſemiperiferia HKM ad medium proportionale inter hanc ſemiperiferiam & ſemiperiferiam circuli alterius hkm, id eſt in dimidiata ratione diametri HM ad diametrum hm, hoc eſt in dimidiata ratione perimetri Cycloidis primæ ad perimetrum Cycloidis alterius, adeoq; tempus illud in Cyclo-

cloide quavis eſt (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli BEC contenti ſub ſemidiametro Rotæ, qua Cyclois deſcripta fuit, & differentia inter ſemidiametrum illam & ſemidiametrum globi. Q. E. I. Eſt & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in dimidiata ratione longitudinis fili AR. Q. E. I.

Porro ſi in globis concentricis deſcribantur ſimiles Cycloides: quoniam earum perimetri ſunt ut ſemidiametri globorum & vires in analogis perimetrorum locis ſunt ut diſtantiæ locorum a communi globorum centro, hoc eſt ut globorum ſemidiametri, atq; adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes ſimiles, æqualia erunt tempora quibus perimetrorum partes ſimiles Oſcillationibus ſimilibus deſcribuntur, & propterea Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ. Cum igitur Oſcillationum tempora in Globo dato ſint in dimidiata ratione longitudinis AR, atq; adeo (ob datam AC)in dimidiata ratione numeri $\frac{AR}{AC}$, id eſt in ratione integra numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$; & hic numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ ſervata ratione AR ad AC (ut fit in Cycloidibus ſimilibus) idem ſemper maneat, & propterea in globis diverſis, ubi Cycloides ſunt ſimiles, ſit ut tempus: manifeſtum eſt quod Oſcillationum tempora in alio quovis globo dato, atq; adeo in globis omnibus concentricis ſunt ut numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$, id eſt, in ratione compoſita ex dimidiata ratione longitudinis fili AR directe & dimidiata ratione ſemidiametri globi AC inverſe. Q. E. I.

Deniq; ſi vires abſolutæ diverſorum globorum ponantur inæquales, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde ſi tempora capiantur in dimidiata ratione virium inverſe, velocitates erunt in eadem dimidiata ratione directe, & propterea ſpatia erunt æqualia quæ his temporibus deſcribuntur. Ergo Oſcillationes in globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunq; cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex di-

midiata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione distantiæ inter centrum Penduli & centrum globi inverse, & dimidiata ratione vis absolutæ etiam inverse, id est, si vis illa dicatur V, in ratione numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Trochoide quavis APS ut $\frac{1}{2}BC$ ad $\sqrt{BEC}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *D. C. Wrennus* & *D. C. Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies Sphærica in planum, visq; centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu, longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *D. C. Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus

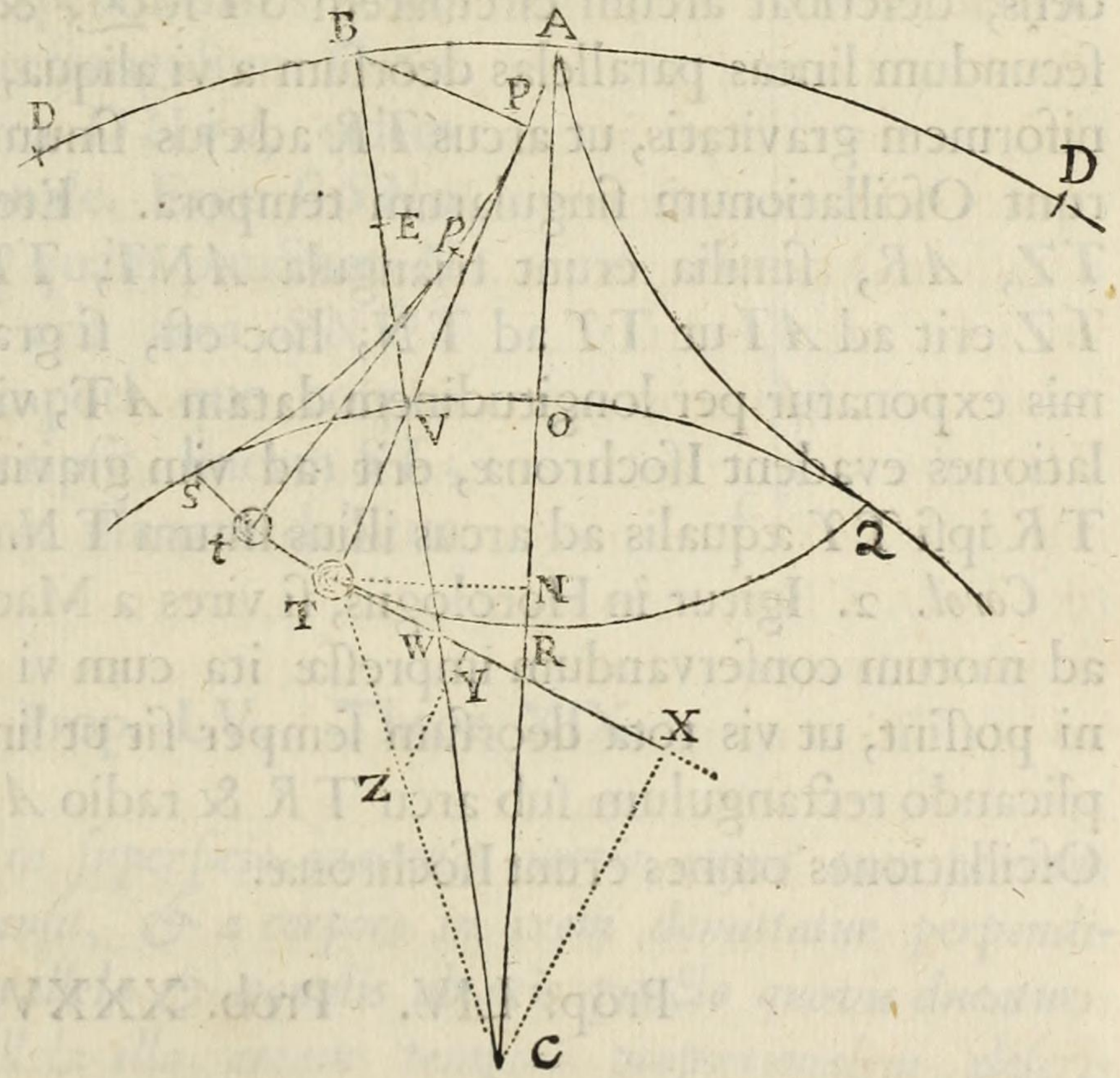
intra

intra globos Oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

Conceſſis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis ſit *OR* tranſiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inq; hac Tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex figurarum Quadraturis per Methodos vulgares innoteſcit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* Tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. Q.E.I.



Nam ſi vis, qua corpus trahitur de *T* verſus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires *TY*,

$T\Upsilon$, ΥZ; quarum ΥZ trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera $T\Upsilon$ motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc ſit ut via deſcribenda TR, acceleratione corporis vel retardationes in Oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus T filo rectilineo AT a centro A pendens, deſcribat arcum circularem $STRQ$, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus ſinum TN: æqualia erunt Oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, ſimilia erunt triangula ANT, $T\Upsilon Z$; & propterea TZ erit ad AT ut $T\Upsilon$ ad TN; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT, vis TZ, qua Oſcillationes evadent Iſochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR ipſi $T\Upsilon$ æqualis ad arcus illius ſinum TN.

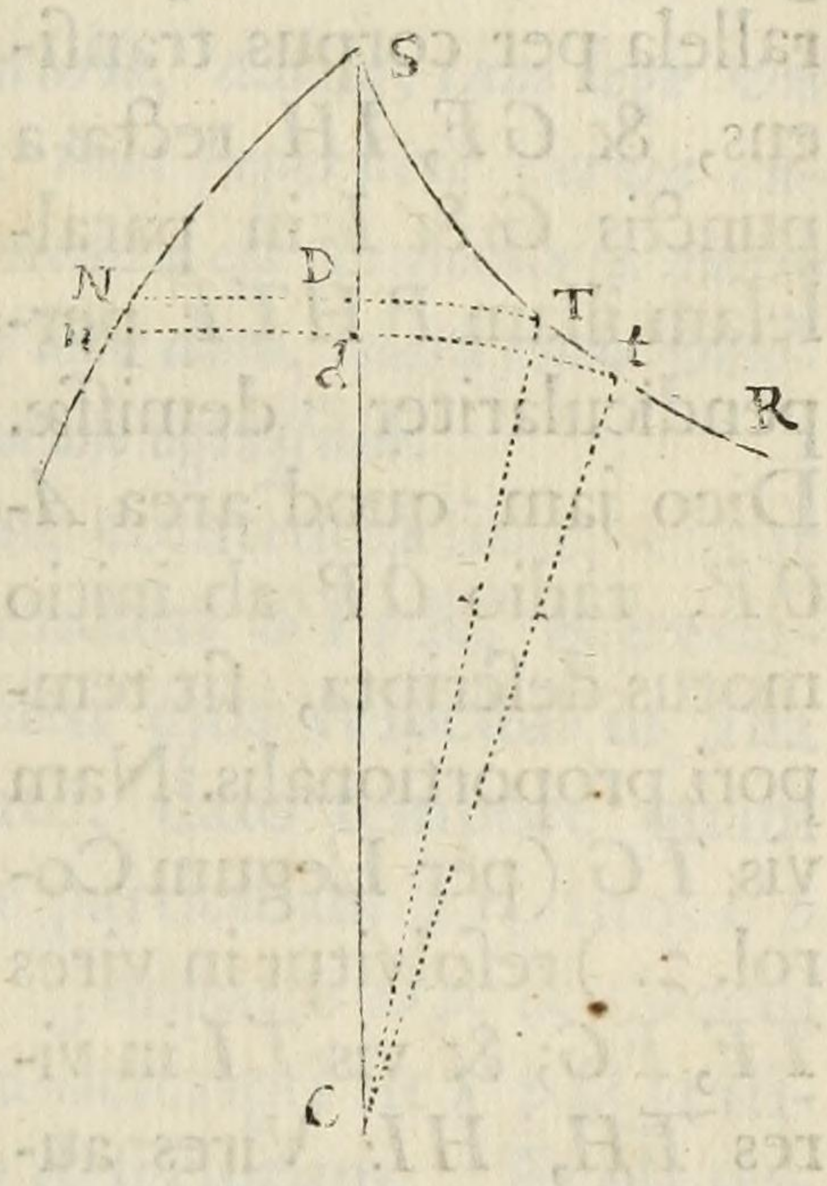
Corol. 2. Igitur in Horologiis, ſi vires a Machina in Pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu TR & radio AR, ad ſinum TN, Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ.

Prop. LIV. Prob. XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuſcunq; curvis in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat enim corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam $STtR$ in plano per virium centrum C tranſeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſit-

ſitq; *D d* partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *C D*, *C d* deſcribantur circuli *D T*, *d t*, Lineæ curvæ *S T t R* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *C S* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *C T*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam *T t*, eſt ut lineolæ hujus longitudo (id eſt ut ſecans anguli *t T C*) directe, & velocitas inverſe. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata *D N* ad rectam *C S* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *D d* erit rectangulum *D d* x *D N*, hoc eſt area *D N n d*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi *S N n* ſit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *S N D S* proportionalis tempori quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam *S T*; proindeq; ex inventa illa area dabitur tempus. Q. E. I.

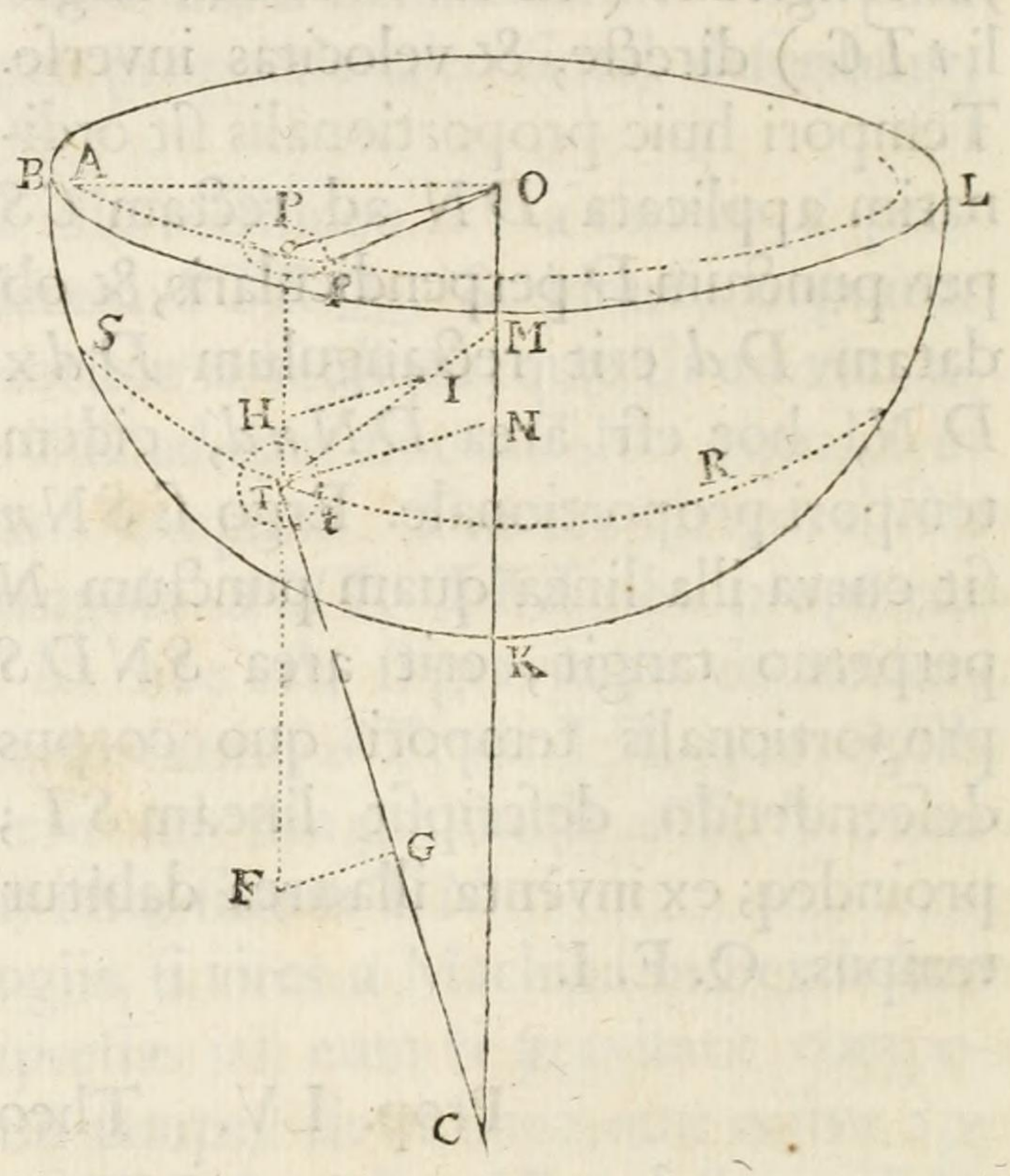


Prop. LV. Theor. XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quacunq; curva, cujus axis per centrum virium tranſit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eiq; parallela & æqualis ab axis puncto quovis ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit *B S K L* ſuperficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *S T t R* Trajectoria quam corpus in eadem deſcribit, *S* initium Trajectoriæ, *O M N K* axis ſuperficiei curvæ, *T N* recta a corpore in axem perpendicularis, *O P* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *A P* veſtigium Trajectoriæ a puncto *P*

in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* deſcriptum, *A* veſtigii initium puncto *S* reſpondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta ; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis ; *TM* recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi preſſionis qua corpus urget ſuperficiem, viciſſimq; urgetur verſus *M* a ſuperficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus tranſi-



ens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demiſſæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI:* Vires autem T*F*, T*H* agendo ſecundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoq; motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus, hoc eſt motus puncti *P*, quo Trajectoriæ veſtigium *AP* in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires T*F*, T H tollerentur, & corpus ſolis viribus *FG*, H *I* agitaretur, hoc eſt idem ac ſi corpus in plano *AOP* vi centripeta ad centrum *O* tendente & ſummam virium *FG* & H I æquante, deſcriberet curvam *AP*. Sed vi tali deſcribetur area *AOP* (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. E. D.

Corol. Eodem argumento ſi corpus a viribus agitatum ad centra

duo

duo vel plura in eadem quavis recta *C O* data tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunq; curvam *S T*, foret area *A O P* tempori ſemper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum Quadraturis, datiſq; tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curva cujus axis per centrum illud tranſit; inveniendа eſt Trajectoria quam corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, data cum velocitate verſus plagam in ſuperficie illa datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore Propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus de loco *S* in Trajectoriam inveniendam *S T t R*, & ex data ejus velocitate in altitudine *S C* dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *T C*. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, deſcribat corpus Trajectoriæ ſuæ particulam *T t*, ſitq; *P p* veſtigium ejus plano *A O P* deſcriptum. Jungatur *O p*, & circelli centro *T* intervallo *T t* in ſuperficie curva deſcripti ſit *P p Q* veſtigium Ellipticum in eodem plano *O A P p* deſcriptum. Et ob datum magnitudine & poſitione circellum, dabitur Ellipſis illa *P p Q*. Cumq; area *P O p* ſit tempori proportionalis, atq; adeo ex dato tempore detur, dabitur *O p* poſitione, & inde dabitur communis ejus & Ellipſeos interſectio *p*, una cum angulo *O P p*, in quo Trajectoriæ veſtigium *A P p* ſecat lineam *O P*. Inde autem invenietur Trajectoriæ veſtigium illud *A P p*, eadem methodo qua curva linea *V I K k* in Propoſitione XLI. ex ſimilibus datis inventa fuit. Tum ex ſingulis veſtigii punctis *P* erigendo ad planum *A O P* perpendicula *P T* ſuperficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur ſingula Trajectoriæ puncta *T*. Q. E. I.

SECT. XI.

De Motu Corporum Sphæricorum viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neq; attrahens poſſit quieſcere neq; attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per Legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia ſe mutuo attrahant) hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur Impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur, & propterea miſſis diſputationibus Phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

Prop. LVII. Theor. XX.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuo, figuras ſimiles.

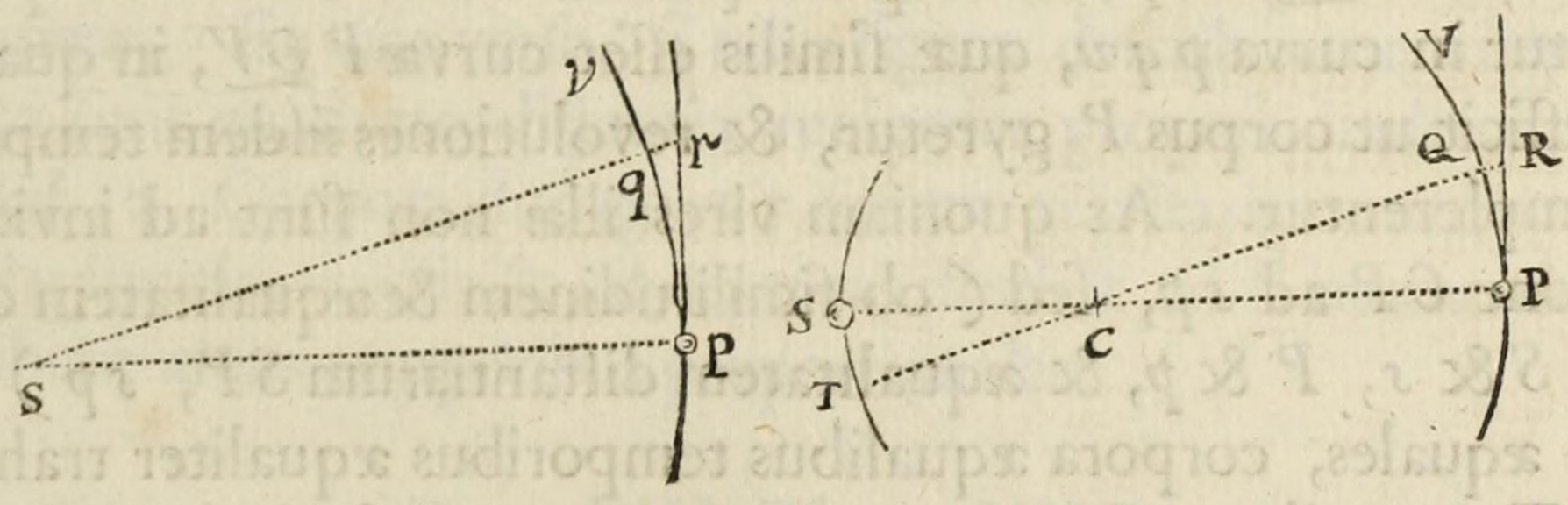
Sunt enim diſtantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atq; adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminos ſuos communi motu

tu angulari, propterea quod in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quieſcunt vel motu quovis non angulari movẽtur) deſcribunt omnino ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. Q. E. D.

Prop. LVIII. Theor. XXI.

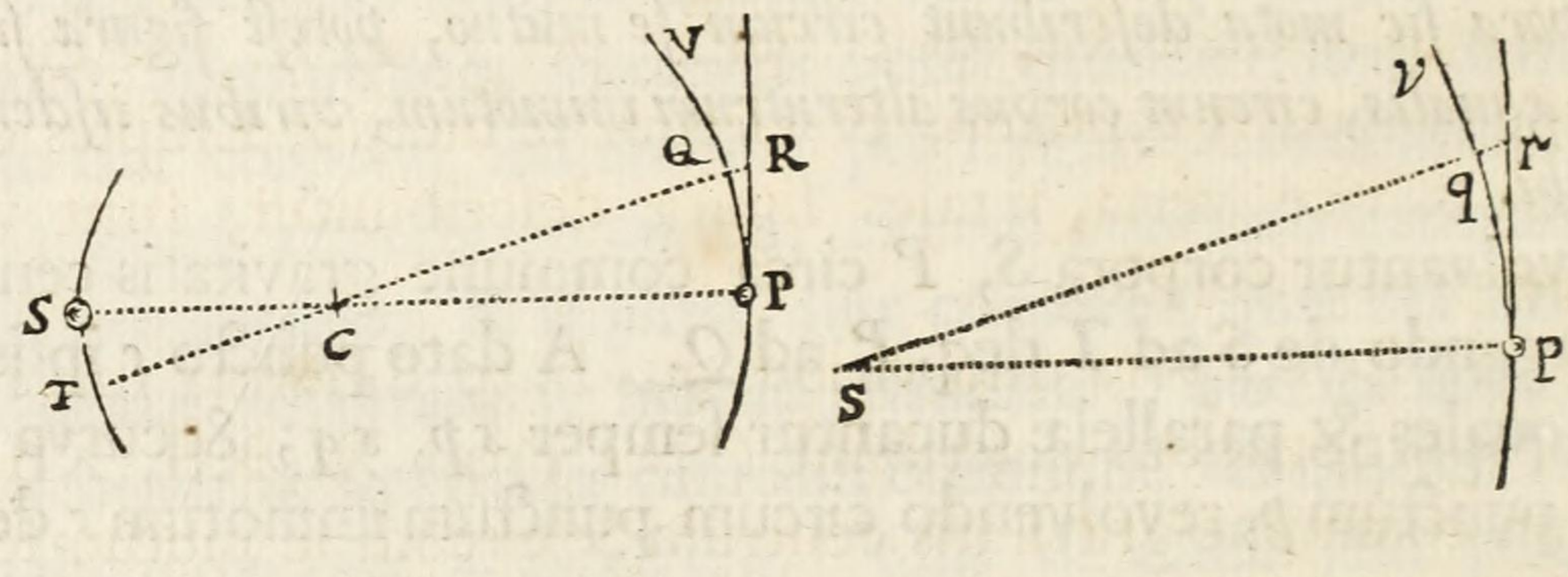
Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuo, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deq; *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; & curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, deſcribit, erit ſimilis & æqualis curvis quas corpora *S*, *P* deſcribunt circum ſe mutuo: proindeq; (per Theor. *XX*.) ſimilis curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: id adeo quia proportiones linearum *SC*, *CP* & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.



Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per Legum Co-

rollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inq; *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *P R* & *p r* curvas *P Q* & *p q* in *P* & *p*, & producantur *C Q* & *s q* ad *R* & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *C P R Q*, *s p r q*, erit *R Q* ad *r q* ut *C P* ad *s p*, adeoq; in data ratione. Proinde ſi vis qua Corpus *P* verſus Corpus *S*, atq; adeo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim qua corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *P R*, *p r* ad arcus *P Q*, *p q*, per intervalla ipſis pro-



portionalia *R Q*, *r q*; adeoq; vis poſterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in curva *p q v*, quæ ſimilis eſſet curvæ *P Q V*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *C P* ad *s p*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *S P*, *s p*) ſibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de Tangentibus; & propterea ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *r q*, requiritur tempus majus, idq; in dimidiata ratione intervallorum; propterea quod, per Lemma decimum, ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* eſſe ad velocitatem corporis *P* in dimidiata ratione diſtantiæ *s p* ad diſtantiam *C P*, eo ut temporibus quæ ſint in eadem dimidiata ratione deſcri-

ſcribantur arcus PQ, pq, qui ſunt in ratione integra: Et corpora P, p viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s figuras ſimiles PQV, pqv, quarum poſterior pqv ſimilis eſt & æqualis figuræ quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoq; corpora deſcribent circum ſe mutuo figuras eaſdem ac prius, & propterea figuræ pqv ſimiles & æquales. Q.E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Ellipſes concentricas: & vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, ſunt vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum & circum ſe mutuo ſectiones conicas umbilicos habentes in centro circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolventium tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis & figuris quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in dimidiata ratione corporis alterius S, ad ſummam corporum $S+P$.

Namq;

Namq; ex demonſtratione ſuperioris Propoſitionis, tempora quibus arcus quivis ſimiles $P\,Q$ & $p\,q$ deſcribuntur, ſunt in dimidiata ratione diſtantiarum $C\,P$ & $S\,P$ vel $s\,p$, hoc eſt, in dimidiata ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles $P\,Q$ & $p\,q$ deſcribuntur, hoc eſt tempora tota quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahentia, revoluntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipſeos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S deſcribit, Axis tranſverſus erit ad axem tranſverſum Ellipſeos, quam corpus idem P circa alterum quieſcens S eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum S+P ad primam duarum medie proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema ſuperius, forent in dimidiata ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratine tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipſeos autem axis tranſverſus per Theorema VII. minuetur in ratione cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ eſt triplicata; adeoq; ad axem tranſverſum Ellipſeos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverſe, axis tranſverſus Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem tranſverſum deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neq; alias agitata vel impedita, quomodocunq; moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumq; a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ corporum a centro illo communi atq; reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoq; eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. Q.E.D.

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunq; derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamq; illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel deniq; ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunq; derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel deniq; ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſq;. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema novissimum, perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet (per Hypothesin) & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deq; locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyrantium

motus

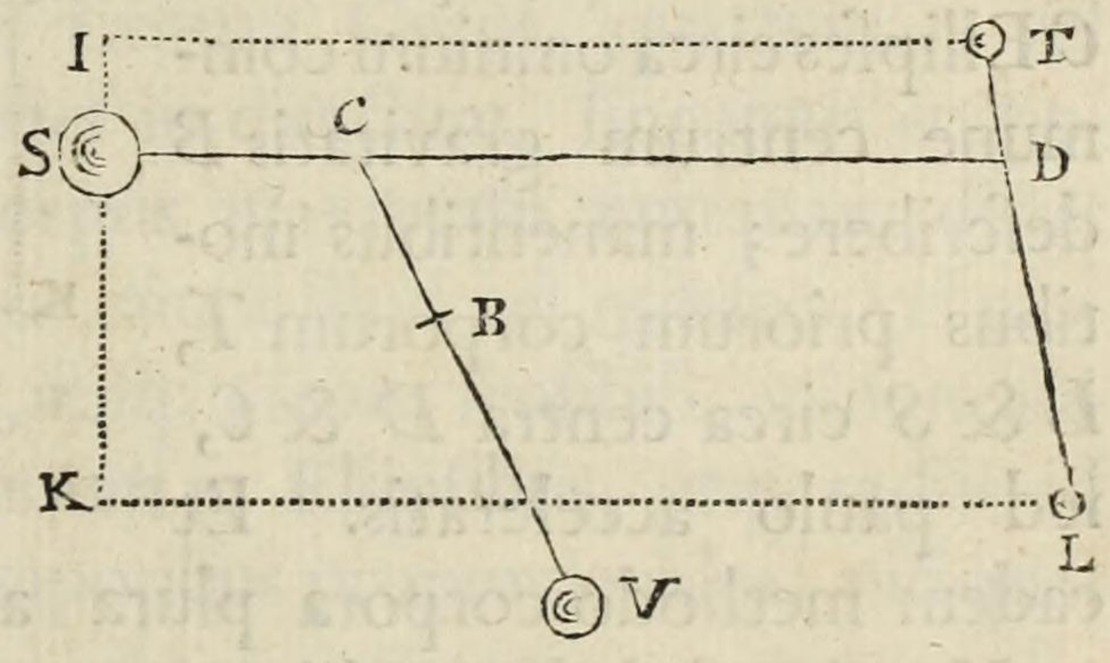
motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur motus plurium Corporum inter ſe.

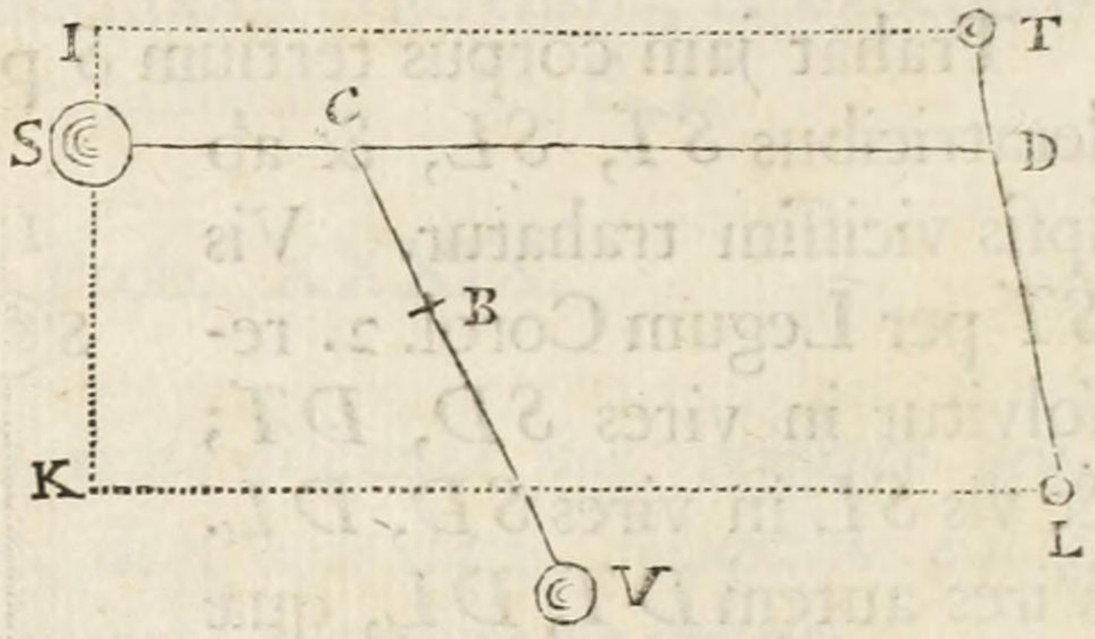
Ponantur imprimis corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI. Ellipſes centra habentes in D, quarum magnitudo ex Problemate V. innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST, SL, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST per Legum Corol. 2. reſolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL, atq; adeo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; adeoq; (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 7. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas TI, LK ipſi DS parallelas, nil mutant ſitus earum ad invicem, ſed faciunt ipſa æqualiter accedere ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus



faciendo ut Syſtema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S (eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, trahitur verſus centrum C) deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D ob proportionales CS, CD deſcribet Ellipſin conſimilem, e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, poſterius poſteriore) æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum eſt) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D Ellipſes ſuas deſcribendo, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis B deſcribere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, ſed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.



Hæc ita ſe habent ubi corpora T & L trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. Q. E. I.

Prop. LXV. Theor. XXV.

Corpora plura quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum

rum ab eorundem centris, moveri posse inter se in Ellipsibus, & radiis ad umbilicos ductis Areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq; fieri potest ut corpora secundum legem hic positam se mutuo trahentia moveantur in Ellipsibus accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantq; ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum.) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro; & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absq; errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsibus, atq; radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usq; donec error iste & actiones mutuæ sint datis quibusvis minores, atq; adeo donec orbes cum Ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, absq; errore qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Syste-

tema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum, & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum minores ſint differentiæ & inclinationes ad invicem quam datæ quævis, perſeverabunt motus partium Syſtematis inter ſe abſq; erroribus qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, Syſtema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius ; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipſim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, verret areas temporibus proportionales,abſq; ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ (perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. Q. E. O

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Syſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Syſtematis inter ſe, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Syſtematis verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo ; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo: Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas

pa-

parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorq; ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi Syſtematis hujus partes in Ellipſibus vel Circulis ſine perturbatione inſigni moveantur, manifeſtum eſt, quod eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter & ſecundum lineas parallelas quamproxime.

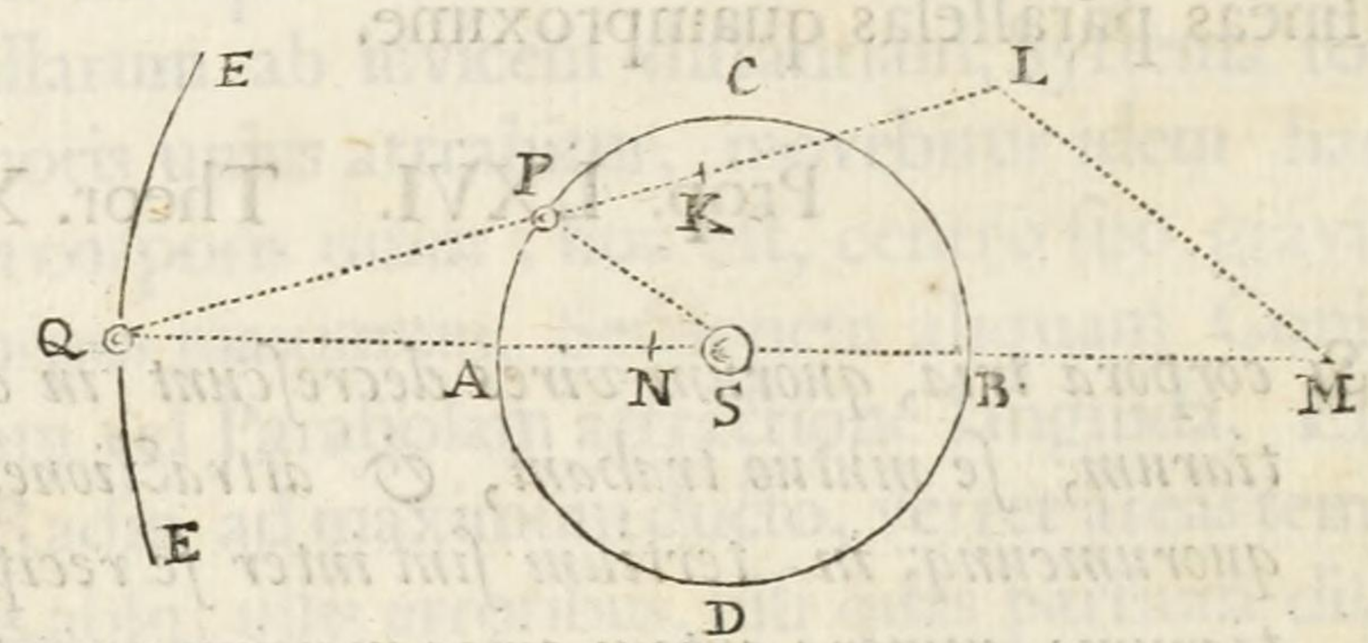
Prop. LXVI. Theor. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum in plano communi revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & Q in eodem plano circa maximum S, quorum P deſcribat orbem interiorem PAB, & Q exteriorem QE. Sit QK mediocris diſtantia corporum P & Q; & corporis P verſus Q attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione QK ad

ad QP capiatur QL ad QK, & erit QL attractio acceleratrix corporis P verſus Q in diſtantia quavis QP. Junge PS, eiq; parallelam age LM occurrentem QS in M, & attractio QL reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones QM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici : una tendente ad S & oriunda a mutua attractione corporum S & P. Hac vi ſola corpus P, circum corpus S ſive immotum, ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio PS temporibus proportionales, & Ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis S. Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. *XXI*. Vis altera eſt attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad S, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor.



XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PS reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idq; eo magis quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor XXI.) vis qua Ellipſis circa umbilicum S deſcribitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ PS reciproce proportionalis; vis illa compoſita aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis PAB aberret a forma Ellipſeos umbilicum habentis in S; idq; eo magis quo major eſt aberratio ab hac proportione; atq; adeo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia QM, trahendo corpus P ſecundum lineam ipſi QS parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a P in S, quæq; ab hac determinatione tanto ma-

magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atq; adeo quæ faciet ut corpus *P*, radio *SP*, areas non amplius temporibus proportionales deſcribet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigitur a *P* ad *S*, tum etiam quod non ſit proportionalis quadrato diſtantiæ *PS*. Quibus intellectis, manifeſtum eſt quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis *S* attractio acceleratrix verſus *Q* per lineam *QN*; & ſi attractiones acceleratrices *QM*, *QN* æquales eſſent, hæ trahendo corpora *S* & *P* æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per Legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio *QN* minor eſſet attractione *QM*, tolleret ipſa attractionis *QM* partem *QN*, & maneret pars ſola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio *QN* major eſſet attractione *QM*, oriretur ex differentia ſola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *QN* reducitur ſemper attractio tertia ſuperior *QM* ad attractionem *MN*, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt ubi corporum *P* & *S* attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus *Q*, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt ubi attractio *QN* non eſt nulla, neq; minor minima attractionum omnium *QM*, ſed inter attractionum omni-

nium QM maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neq; multo minor attractione QK. Q. E. D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P, Q circa maximum S in planis diverſis, & vis LM, agendo ſecundum lineam PS in plano Orbitæ PAB ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neq; corpus P de plano Orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera NM, agendo ſecundum lineam quæ ipſi QS parallela eſt, (atq; adeo, quando corpus Q verſatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB;) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano ſuæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum P & S ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans MN, adeoq; minima evadet ubi MN eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio QN non eſt multo major neq; multo minor attractione QK. Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod ſi corpora plura minora P, Q, R &c. revolvantur circa maximum S: motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum S pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atq; cæteri a ſe mutuo.

Corol. 2. In Syſtemate vero trium corporum S, P, Q; ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum, corpus P radio PS aream circa corpus S velocius deſcribet prope conjunctionem A & oppoſitionem B, quam prope quadraturas C, D. Namq; vis omnis qua corpus P urgetur & corpus S non urgetur, quæq; non agit ſecundum lineam PS, accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in antecedentia vel in conſequentia dirigitur. Talis eſt vis NM. Hæc in tranſitu corporis P a C ad A tendit in antecedentia, motumq; accelerat; dein uſq; ad D in conſequentia, & motum retardat; tum in antecedentia uſq; ad B, & ultimo in conſeqentia tranſeundo a B ad C.

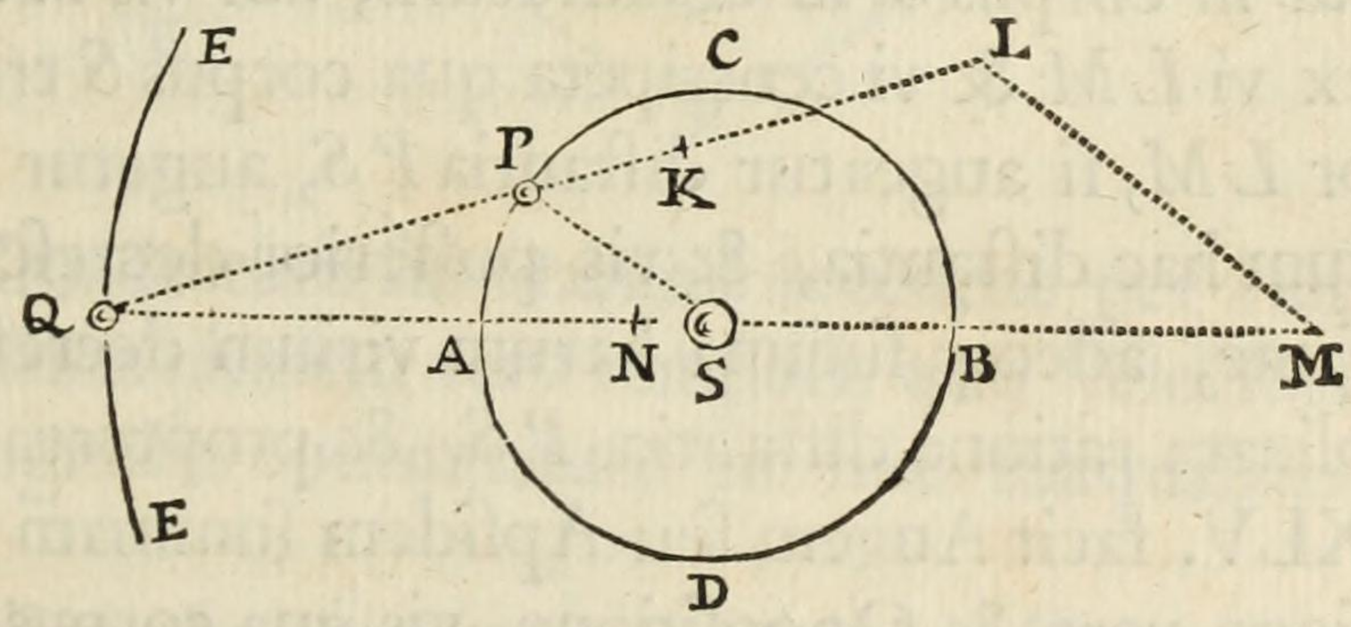
Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P, cæteris par-

paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* cæteris paribus curvior est in quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoq; vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi Apsides sunt in Syzygiis; indeq; fieri potest ut corpus *P*, ad Apsidem summam appellans, absit longius a corpore *S* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur; est autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoq; tempus periodicum, si maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq; in dimidiata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoq; adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel di-

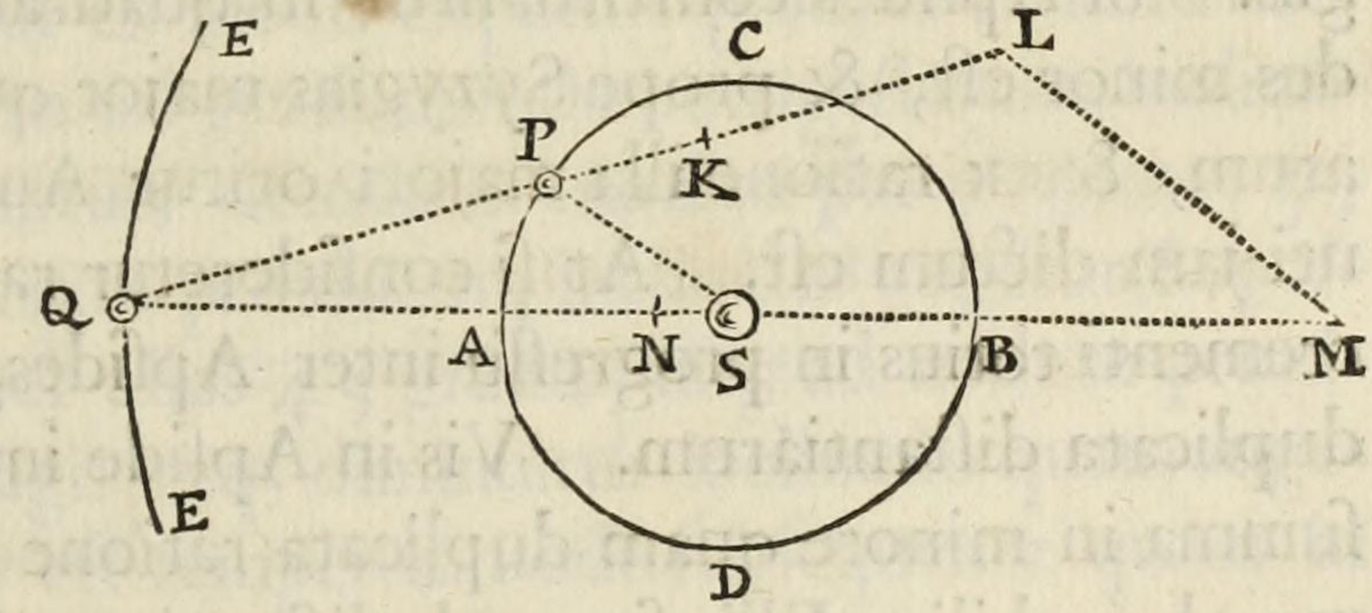


minui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *S*; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui *Q*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices, augebitur ſimul ac diminuetur Radius *SP* per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis *S* per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *Q* diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore *P* deſcriptæ axis ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* in Quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta qua corpus *S* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, ſi augeatur diſtantia *PS*, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoq; ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ *PS*, & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem ſeu Apſidem ſummam regredi. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* differentia eſt inter vim qua corpus *S* trahit corpus *P* & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione diſtantiæ *PS*, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ *PS*, adeoq; per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygias & Quadraturas, pendet motus Augis ex cauſa utraq; conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in Syzygiis ſit quaſi dupla vis *LM* in quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim *KL*, transferetq; Augem ſingulis re-

revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum *S*, *P* corporibus pluribus $\underline{Q}$, $\underline{Q}$, $\underline{Q}$ &c. in Orbe $\underline{QE}$ consistentibus, undeq; cingi. Namq; horum actionibus actio ipsius S minuetur undiq; ,decrescetq; in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ *SP*, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atq; adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam *KL* seu *NM* — *LM*, progredientur velocius, inq; Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.



Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: Manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoq; Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hu-

hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab Apſide ima ad Apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, adeoq; ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper Excentricitas, & e contra, diminuetur eadem ſi ratio illa decreſcat. Jam vero in Syſtemate corporum S, *P*, *Q*, ubi Apſides orbis *P A B* ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, & maxima fit ubi Apſides ſunt in Syzygiis. Si Apſides conſtituantur in quadraturis ratio prope Apſides minor eſt, & prope Syzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velociſſimus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter Apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ Apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam Apſidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apſides conſtituuntur in Syzygiis, vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires L *M* in quadraturis additæ viribus corporis S componunt vires in ratione minore, & vires *K* L in Syzygiis ſubductæ viribus corporis *S* relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius in tranſitu inter Apſides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in tranſitu Apſidum a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetq; Excentricitatem Ellipſeos; inq; tranſitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis *Q E S* immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt, quod ex viribus *N M*, *M* L, quæ ſunt

cau-

cauſa illa tota, vis *ML* agendo ſemper ſecundum planum Orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem, quodq; vis *NM* ubi Nodi ſunt in Syzygiis, agendo etiam ſecundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpuſq; *P* de plano Orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a quadraturis ad Syzygias, augetq; viciſſim eandem in tranſitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatq; ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At ſi Nodi conſtituantur in Octantibus poſt quadraturas, id eſt inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expoſitis quod, in tranſitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſq; ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſq; ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaq; diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. Et ſimili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur, ubi nodi ſunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi ſunt in Syzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad Nodos appulſibus, diminuitur, fitq; omnium minima ubi nodi ſunt in quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus quibus antea decreverat, Nodiſq; ad Syzygias proximas appulſis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi nodi ſunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis ſui, idq; in partem verſus *Q*, in tranſitu ſuo a nodo *C* per Conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a nodo *D* per Oppoſitionem *B* ad nodum *C*; manifeſtum eſt quod in motu ſuo a nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis ſui plano primo *CD*, uſq; dum perventum eſt ad nodum proximum; adeoq; in hoc nodo longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum Orbis *QES*,

non

non in plani illius Nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis ☋, quodq; proinde novus eſt Nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent Nodi recedere in tranſitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuo recedunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quieſcunt; in locis intermédiis conditionis utriuſq; participes recedunt tardius, adeoq; ſemper vel retrogradi vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti errores ſunt paulo majores in conjunctione Corporum *P*, ☋ quam in eorum Oppoſitione, idq; ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis ☋, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis ☋ tanta ſtatuitur magnitudo ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *S* & *P* Syſtema. Et ex aucto corpore ☋, auctaq; adeo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus diſtantiis) majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus ☋ circum Syſtema corporum *P* & *S* revolvitur.

Corol. 14 Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus ☋ longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis ☋*K* & ratio *PS* ad ☋*S* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PS*, tum corporis ☋ vis abſoluta, ut ☋*S cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium de quibus actum eſt in præcedentibus Corollariis: manifeſtum eſt quod effectus illi omnes, ſtante corporum *S* & *P* Syſtemate, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis ☋ & ratione triplicata inverſa diſtantiæ ☋*S*. Unde ſi Syſtema corporum *S* & *P* revolvatur circa corpus longinquum ☋, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde ſi magnitudo corporis ☋ proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ

NM

NM, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *Q* e corpore *S* ſpectati, & vice verſa. Namq; hæ rationes eædem ſunt atq; ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus Orbium *QE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum *Q* & *S* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc eſt vis corporis *S*, qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *Q*, qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora ; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunq; corporum magnitudines, vires & diſtantiæ ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Caſu colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime : Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML* cæteris ſtantibus ſunt ut Radius *SP*, & harum effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *S* ſpectati (id eſt tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum *S*, *P*, *Q* Syſtemate, ubi *P* circum *S* ſibi propinquum, & *S* circum *Q* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *S* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverſe. Et inde motus medius

Au-

Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *P A B* non mutantur motus Augis & Nodorum sensibilitur, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *L M* nunc major sit nunc minor quam radius *P S*, Exponatur vis mediocris *L M* per radium illum *P S*, & erit hæc ad vim mediocrem *Q K* vel *Q N* (quam exponere licet per *Q S*) ut longitudo *P S* ad longitudinem *Q S*. Est autem vis mediocris *Q N* vel *Q S*, qua corpus retinetur in orbe suo circum *Q*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S*, in ratione composita ex ratione radii *Q S* ad radium *P S*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *S* ad tempus periodicum corporis *S* circum *Q*. Et ex æquo, vis mediocris *L M*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S* (quave corpus idem *P* eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile *S* ad distantiam *P S* revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia *P S*, datur vis mediocris *L M*; & ea data datur etiam vis *M N* quamproxime per analogiam linearum *P S*, *M N*.

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus *P* circum corpus *S* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *S* ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *S* concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *S*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis *Q*, quam in Quadraturis. Et Nodi annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *Q* vel *S*, quiescent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoq; inclinatio com-

variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaq; revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *S* ex materia non fluida conſtantem ampliari & extendi uſq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam ſuperficies Globi, & ſic fluet in alveo refluetq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio *Q*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum ſuum (per Legum Corol. 5) ut & Globi de curſu rectilineo uniformiter tracti (per Legum Corol. 6.) Accedat autem corpus *Q*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *L M* trahet aquam deorſum in Quadraturis, facietq; ipſam deſcendere uſq; ad Syzygias; & vis *K L* trahet eandem ſurſum in Syzygiis, ſiſtetq; deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed Oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, gyroſq; compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eiq; inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſq; Oſcillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus eſt ubi Nodi ſunt in Syzygiis. Inde in progreſſu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impreſſum uſq; dum annulus conatu contrario

motum hunc tollat, imprimatq; motum novum in contrariam partem: Atq; hac ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atq; adeo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunq; oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neq; propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axiſq; inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa ſuperficiei parte qua priùs, impulſu quocunq; novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impul-

ſus

ſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroq; (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atq; adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſq; primo generaret; atq; adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunq;: Generabunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunq; per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte dividi intelligatur in duo hemiſphæria, urgebit ſemper vis illa utrumq; hemiphærium æqualiter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietq; polos ejus errare per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumq; ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neq; corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu, per Corol. 21, Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione, per Corol. 20, Nodi regredientur; vel deniq; ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur: & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q, circa interiorum P, S commune Gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum S, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis Q attractiones versus *S* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *S* & *P* commune gravitatis centrum *C*, quam in corpus maximum *S*, quæq; quadrato distantiæ *QC* magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ *QS*: ut rem perpendenti facile constabit.

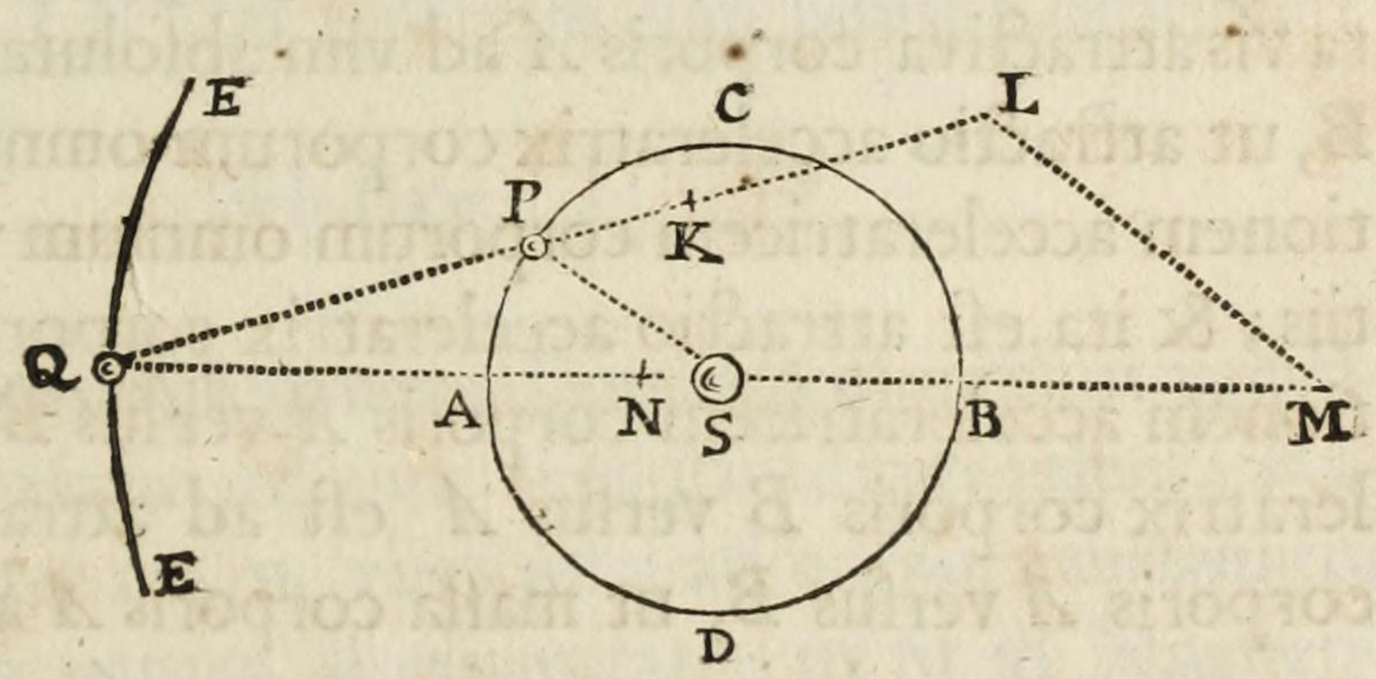
Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q circa interiorum P & S commune gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq; cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis noviſſimæ liquet centrum in quod corpus Q conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus Q ex una

na parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis **LVIII.** collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium ♀ attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit, hoc est ubi corpus intimum & maximum *S* lege cæterorum attrahitur: fitq; major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *S*, moveri incipit & magis deinceps magisq; agitatur.

Corol. Et hinc si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quōd Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahent agitentq;, & Orbitæ cujusq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.



Prop.

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Syſtemate corporum plurium A, B, C, D &c. ſi corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D &c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D &c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora A, B, quorum ſunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi, & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, ſunt (per motus Legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſolutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſint reciproce ut Quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D* &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuſcunq; diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum legem quamcunq; communem ex diſtantiis ab unoquoq; trahente definiuntur ; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In Syſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum ; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol, 1.

Scholium.

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunq; accedendi ad invicem, ſive conatus iſte fiat ab actione corporum vel ſe mutuo petentium, vel per Spiritus emiſſos ſe invicem agitantium, ſive is ab actione Ætheris aut Aeris mediive cujuſcunq; ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunq; impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem impulſus, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens : ut in Defi-

ni-

nitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunq; poſitis conſequentur: deinde ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere, & quales motus inde conſequantur.

SECT. XII.

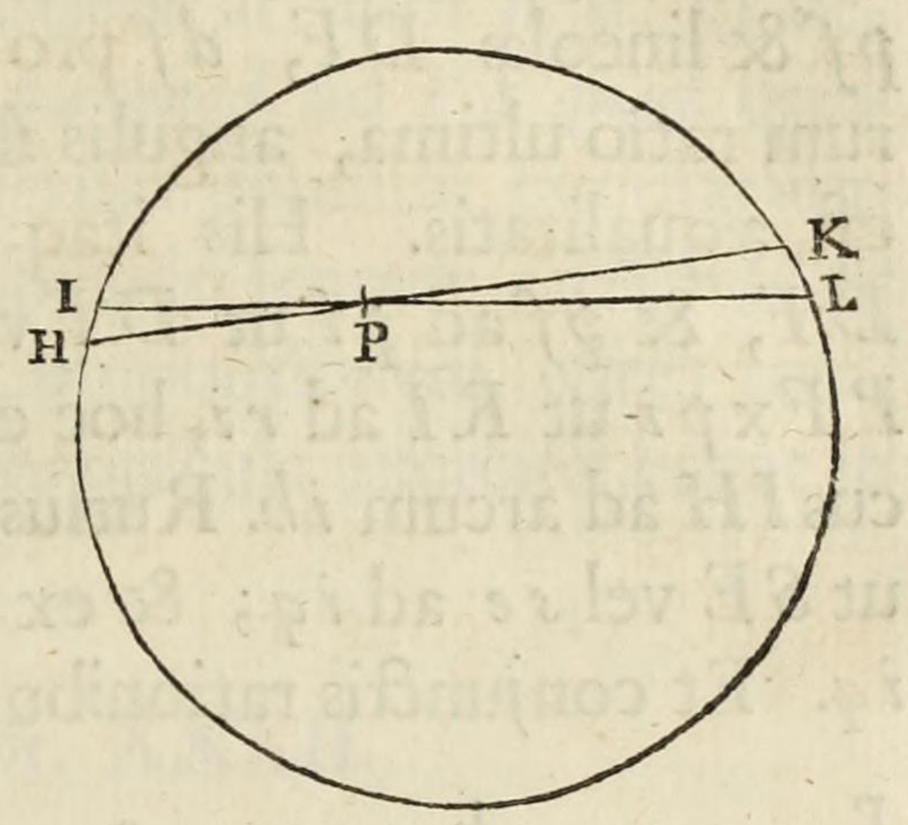
De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX.

Si ad Sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* ſuperficies illa Sphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; & ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales, & ſuperficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad *HI* & *KL* rectis per punctum *P* tranſeuntibus undiq; terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum

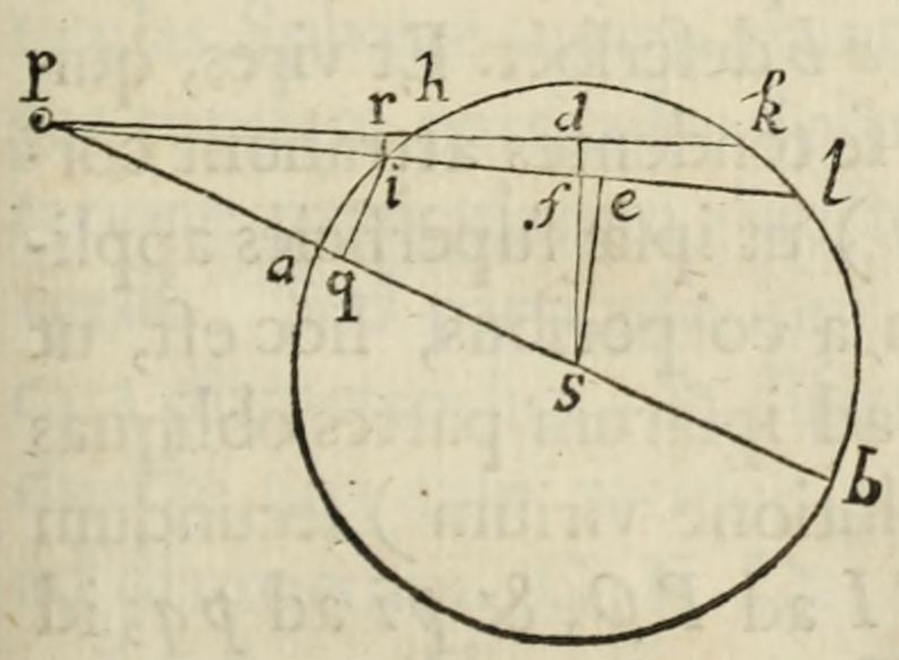
harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ ſe mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

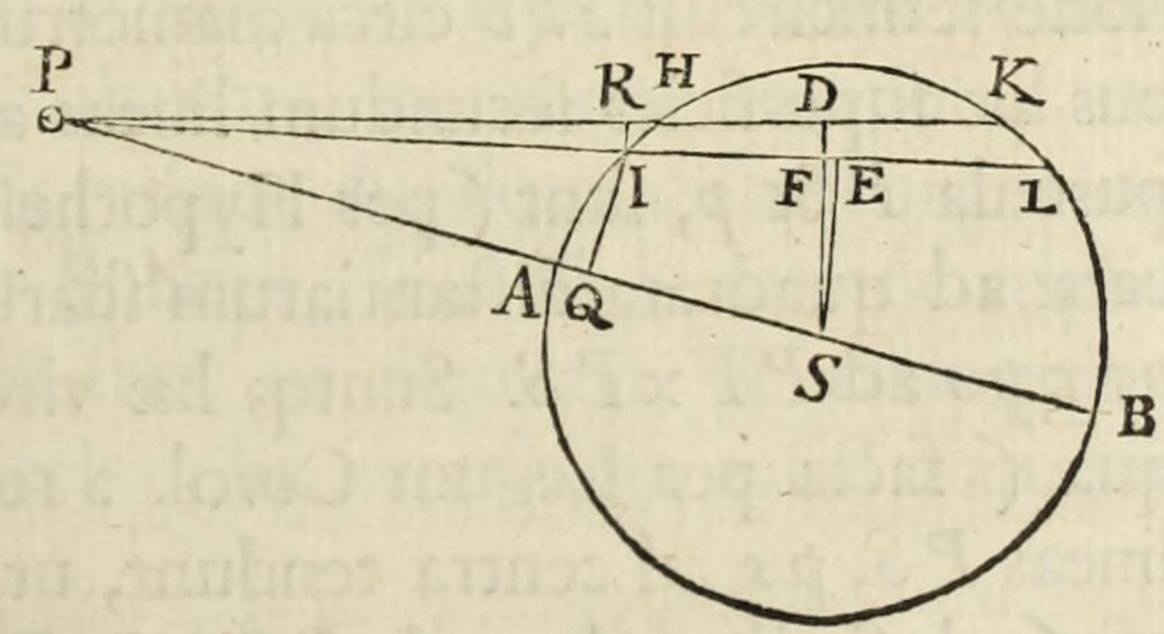


Prop. LXXI. Theor. XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ ſuperficies Sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* deſcriptæ, & *P*, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ

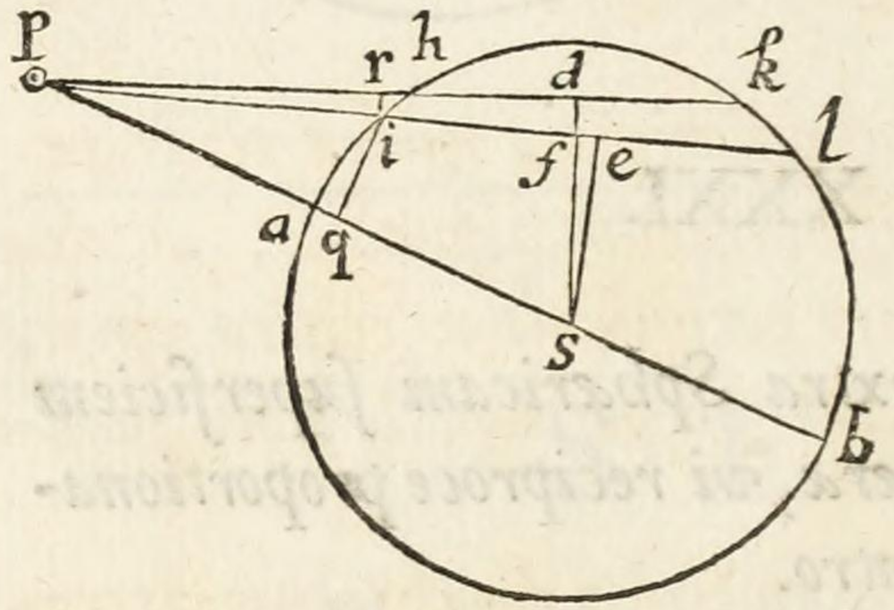


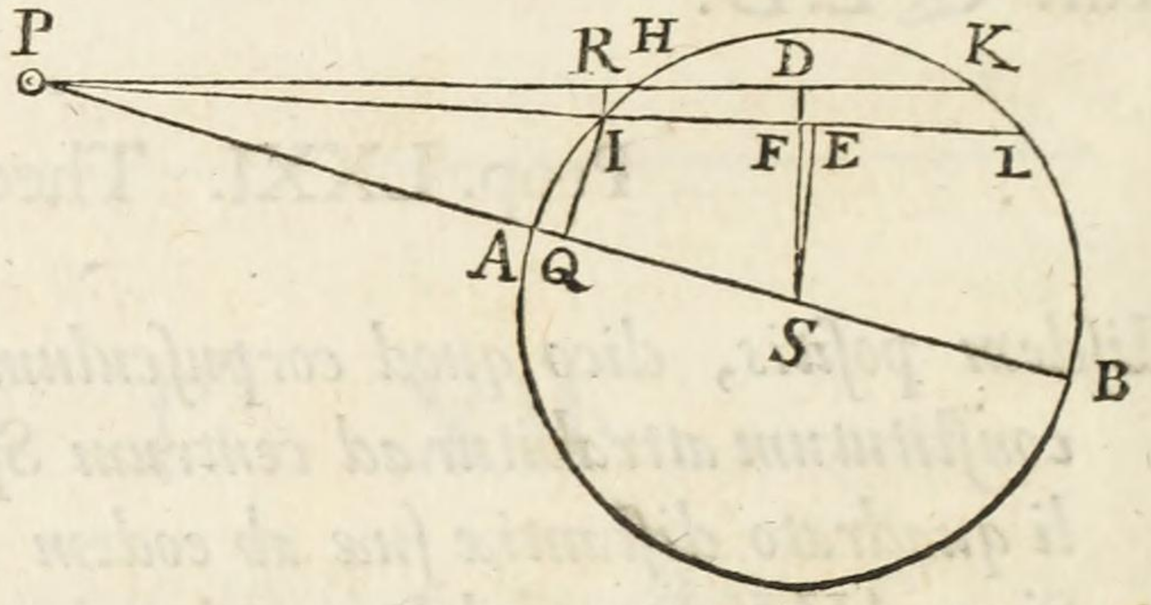


PHK, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus quam minimos *HK*, *hk* & *HL*, *hl*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *s d*; *SE*, *s e*; *IR*, *ir*; quorum

 SD,

SD, sd ſecent PL, pl in F & f. Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq; & ob æquales DS & ds, ES & es, & angulos evaneſcentes DPE & dpe, lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur: quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaq; conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & pf ad pi ut DF vel df ad ri; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum ih. Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut SE vel se ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF$





$\times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ih convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuscula P & p, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntq; hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2 reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde ex æquo fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad

pf

$\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt ut *p s quad.* ad *P S quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum *K L*, *k l* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *p s quad.* ad *P S quad.*; inq; eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraq; ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper $sd = SD$ & $se = SE$, diſtingui poteſt. Et per Compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, & diſtantias a centris proportionales eſſe diametris, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Hinc attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. Q. E. D.

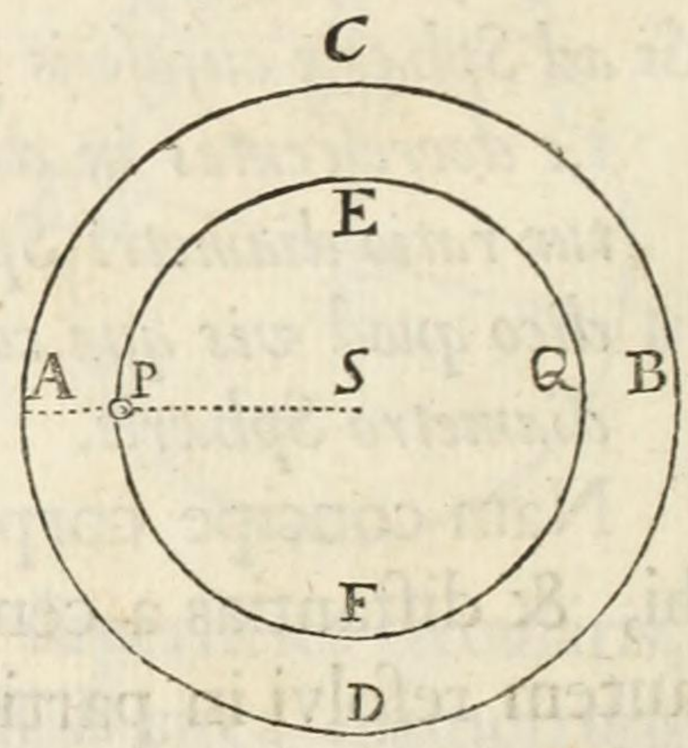
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes revolvantur, ſintq; diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Theor. IV.

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: di-co quod corpuſculum intra Sphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*, & centro eodem *S* intervallo *SP* concipe Sphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, per Theor. XXX. quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Theor. XXXII. hæc eſt ut diſtantia *PS*. Q. E. D.



Scholium.

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure Mathematicæ, ſed Orbes adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum Orbes evaneſcentes ex quibus Sphæra ultimo conſtat, ubi Orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum, juxta Methodum ſub initio in Lemmatis generalibus expoſitam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

Prop.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio Sphæræ totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones ſunt ut Sphæræ. Nam per Theor. XXXII. ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione, & diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoq; erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum extra Sphæram homogeneam poſitum trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem Sphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſq; in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia ſimilaris attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ejus a centro Sphæræ trahentis, (per Theor. XXXI,) &

prop-

propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Theor XXXIV) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ejus a centro Sphæræ; adeoq; huic æqualis attractio Sphæræ eſt in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, verſus alias Sphæras homogeneas, ſunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq; hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius, eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur, adeoq; cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

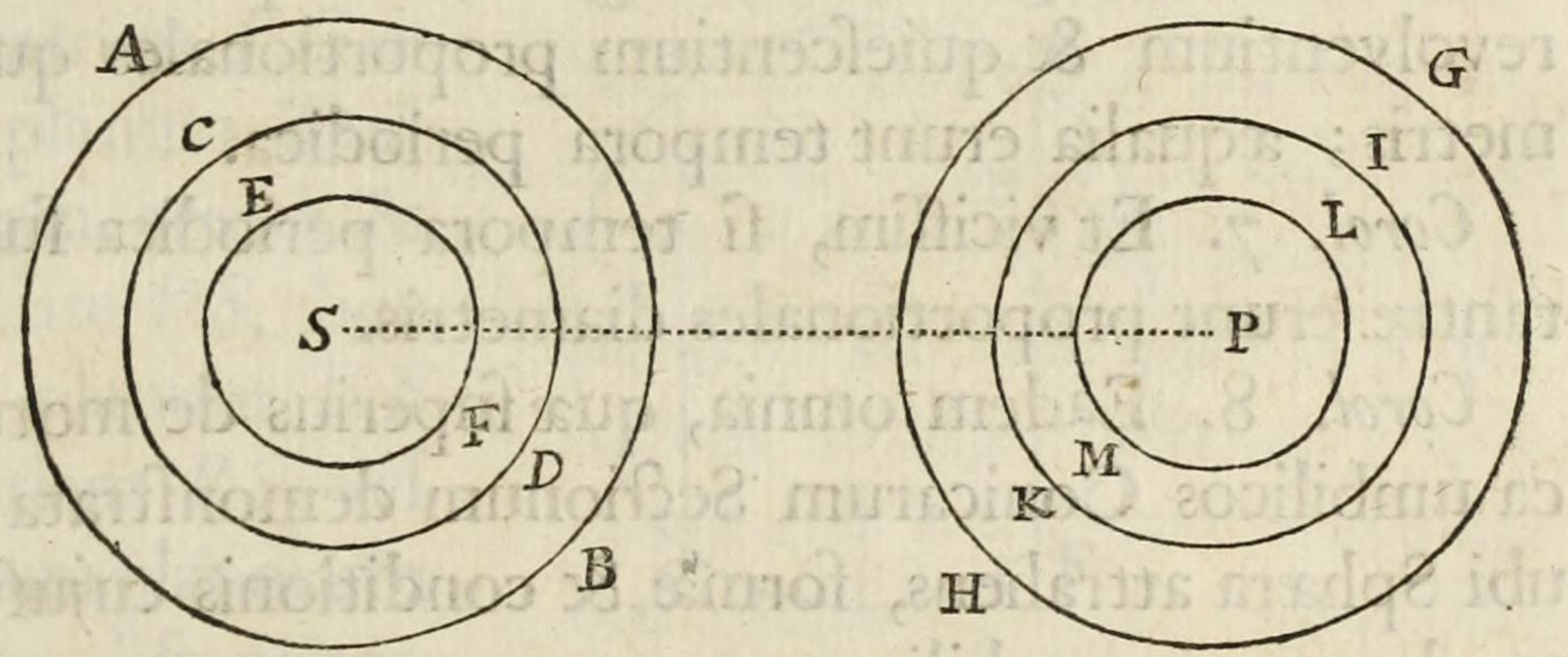
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quod materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunq; diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undiq; ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſq; decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæra una attrahit aliam ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto

Sunto Sphæræ quotcunq; concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunq; creſcat vel decreſcat: & addita materia non attractiva compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. Q.E.D.



Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq; diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriuſq; virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi Sphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas, ſintq; diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia, diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

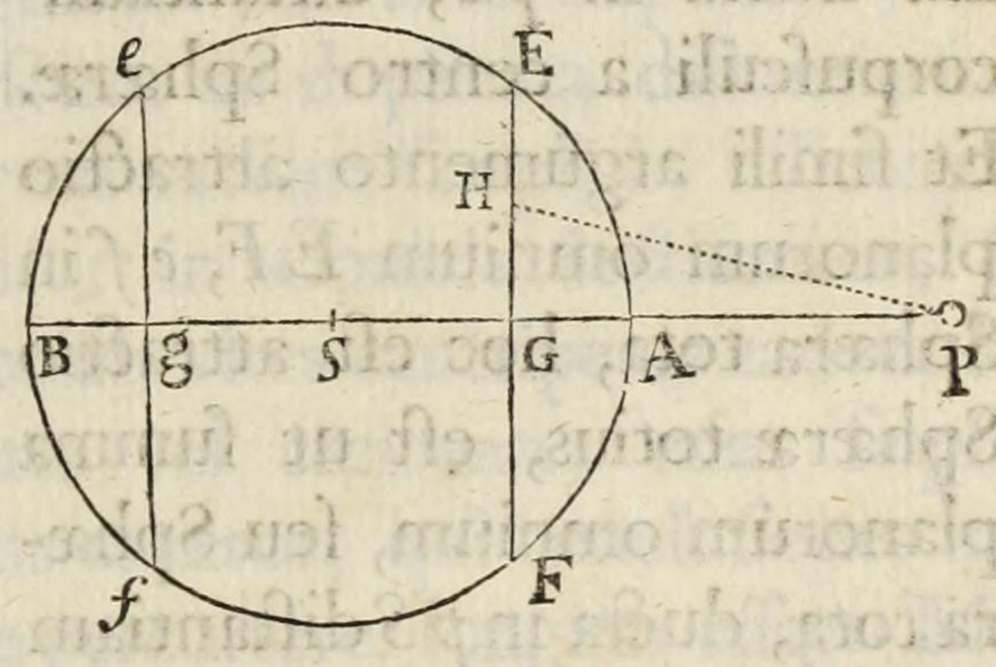
Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad ſingula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis : dico quod vis compoſita, qua Sphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra Sphærarum.

Cas 1. Sit *ACBD* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpuſculi tranſiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia a centro Sphæræ; *Gg* interſectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*.

Puncti

Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P* ſecundum lineam *PH* exercita eſt ut diſtantia *PH*, & (per Legum Corol. 2.) ſecuncundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut numerus punctorum ductus in diſtantiam *PG*: id eſt ut contentum ſub plano ipſo *EF* & diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam *Pg*; ſive ut huic æquale planum *EF* ductum in diſtantiam illam *Pg*; & ſumma virium plani utriuſq; ut planum *EF* ductum in ſummam diſtantiarum *PG* + *Pg*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut duplum planum *EF* ductum in diſtantiam *PS*, vel ut ſumma æqualium planorum *EF* + *ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut Sphæra tota ducta in diſtantiam centri ſui *S* a corpuſculo *P*. Q. E. D.



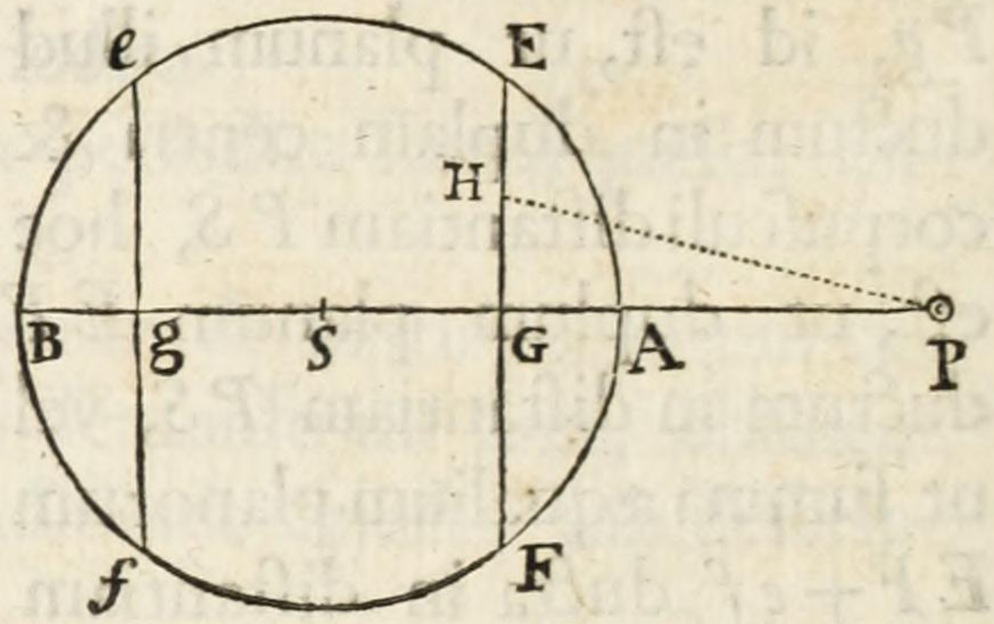
Cas. 2. Trahat jam corpuſculum *P* Sphæram *ACBD*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut diſtantia *PS*. Q. E. D.

Cas 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpuſculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpuſculum unumquodq; trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atq; adeo eadem eſt ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuſcula omnia in Sphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac ſi Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſ-

culo unico in centro Sphæræ primæ, &. propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant Sphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. Q. E. D.

Cas, 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra Sphæram *A C B D*, & quoniam vis plani *e f* in corpuſculum eſt ut contentum ſub plano illo & diſtantia *p g*; & vis contraria plani *E F* ut contentum ſub plano illo & diſtantia *p G*; erit vis ex utraq; compoſita ut differentia contentorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *p S*, diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. Et ſimili argumento attractio planorum omnium *E F*, *e f* in Sphæra tota, hoc eſt attractio Sphæræ totius, eſt ut ſumma planorum omnium, ſeu Sphæra tota, ducta in *p S* diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. Q. E. D.



Cas. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris *p* componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem *A C B D* ſita, probabitur ut prius, quod attractio, ſive ſimplex Sphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſq; in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum *p S*. Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunq; diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undiq; ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſq; ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra Sphærarum.

De-

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVII. ex Propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in Propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum, conditionis jam deſcriptæ, ſuntq; corpora attracta Sphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroq; Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem lege in receſſu a centro decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis. Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet: Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

Lemma XXIX.

Si deſcribantur centro S circulus quilibet AEB, (Vide Fig. Prop. ſequentis) *& centro P circuli duo EF, ef, ſecantes priorem in E, e, lineamq; PS in F, f; & ad PS demittantur perpendicula ED, ed: dico quod ſi diſtantia arcuum EF, ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis Dd ad lineam evaneſcentem Ff ea ſit, quæ lineæ PE ad lineam PS.*

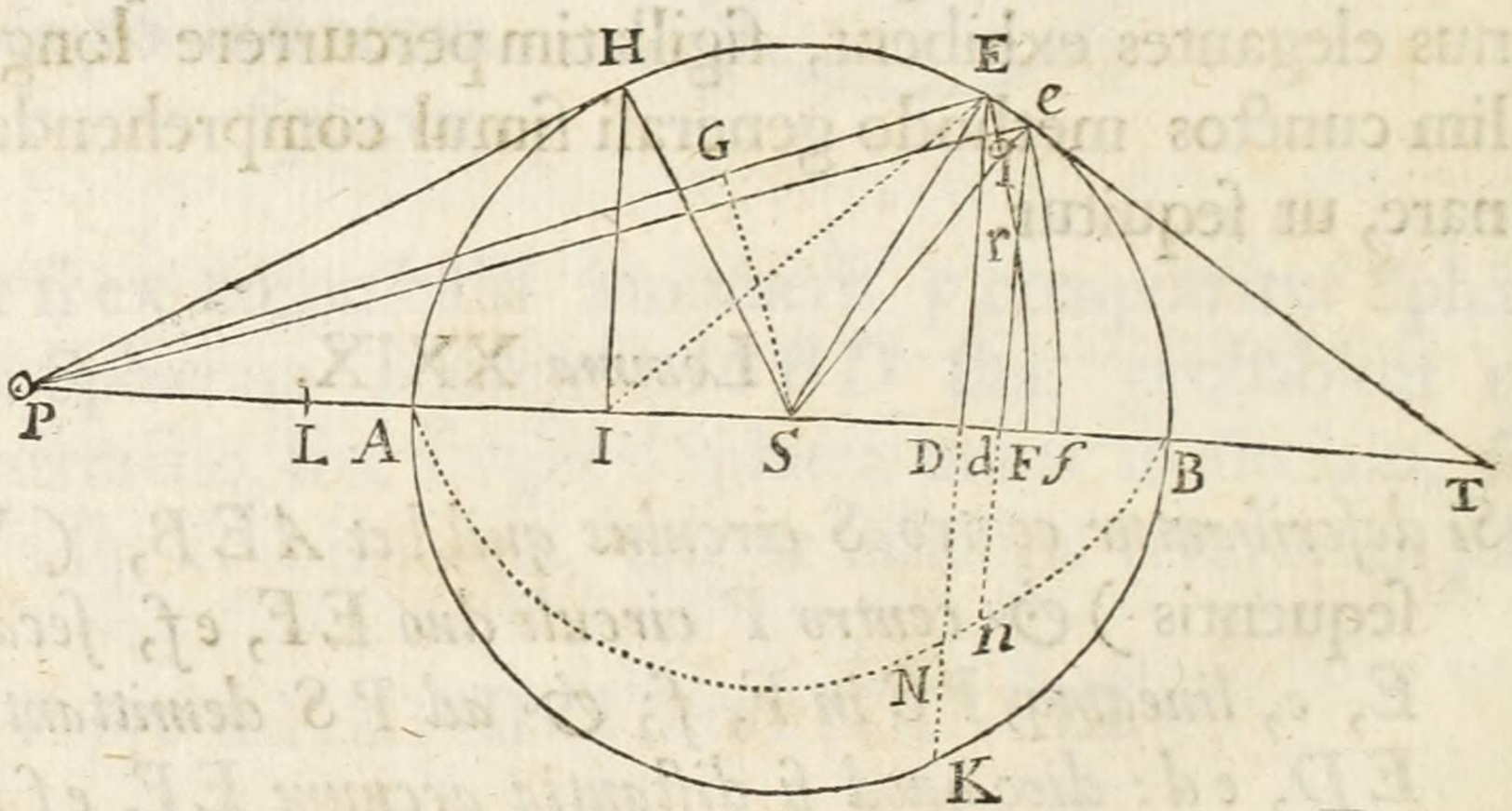
Nam ſi linea *Pe* ſecet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evaneſcente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob ſimilia triangula *EDT*, *edt*, *EDS*; erit *Dd* ad *Ee* ut *DT* ad *ET* ſeu *DE* ad *ES*,

ES, & ob triangula *Eqe*, *ESG* (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, erit *Ee* ad *qe* ſeu *Ff*, ut *ES* ad *SG*, & ex æquo *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc eſt (ob ſimilia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. Q.E.D.

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens EFfe, convolutione ſui circa axem PS, deſcribat ſolidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in P, eſt in ratione compoſita ex ratione ſolidi DE q. x Ff & ratione vis qua particula data in loco Ff traheret idem corpuſculum.

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei Sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente Sphæræ radio *PE*, (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de Sphæra & Cylindro.) Et hujus vis ſecundum lineas *PE* vel *Pr* undiq; in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola *Dd*, vel quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato Sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at ſecundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem



tem minor, in ratione PD ad PE, adeoq; ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur Dd; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, cum lineolæ omnes Dd ſibi invicem æquentur, adeoq; pro datis haberi poſſint, ut ſumma omnium PD ducta in Dd, id eſt, ut $\frac{1}{2} PF\,q. - \frac{1}{2} PD\,q.$ ſive $\frac{1}{2} PE\,q. - \frac{1}{2} PD\,q.$ vel $\frac{1}{2} DE\,q.$ ductum in Dd; hoc eſt, ſi negligatur data $\frac{1}{2} Dd$, ut $DE\,quad.$ Ducatur jam ſuperficies FE in altitudinem Ff; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum P ut $DE\,q. \times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data Ff in diſtantia PF exercet in corpuſculum P. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi $EFfe$ ut ſolidum $DE\,q. \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. Q.E.D.

Prop. LXXX. Theor. XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB, centro S deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB, in quo corpuſculum aliquod P locatur, erigantur de punctis ſingulis D perpendicula DE, Sphæræ occurrentia in E, & in ipſis capiantur longitudines DN, quæ ſint ut quantitas $\frac{DE\,q. \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam PE exercet in corpuſculum P conjunctim: dico quod vis tota, qua corpuſculum P trahitur verſus Sphæram, eſt ut area comprehenſa ſub axe Sphæræ AB & linea curva ANB, quam punctum N perpetuo tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum P eſt ut $DE\,q. \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem per Lem-

ma

ma noviſſimum, Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq. \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEq.}$: erit vis qua corpuſculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEqq.}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

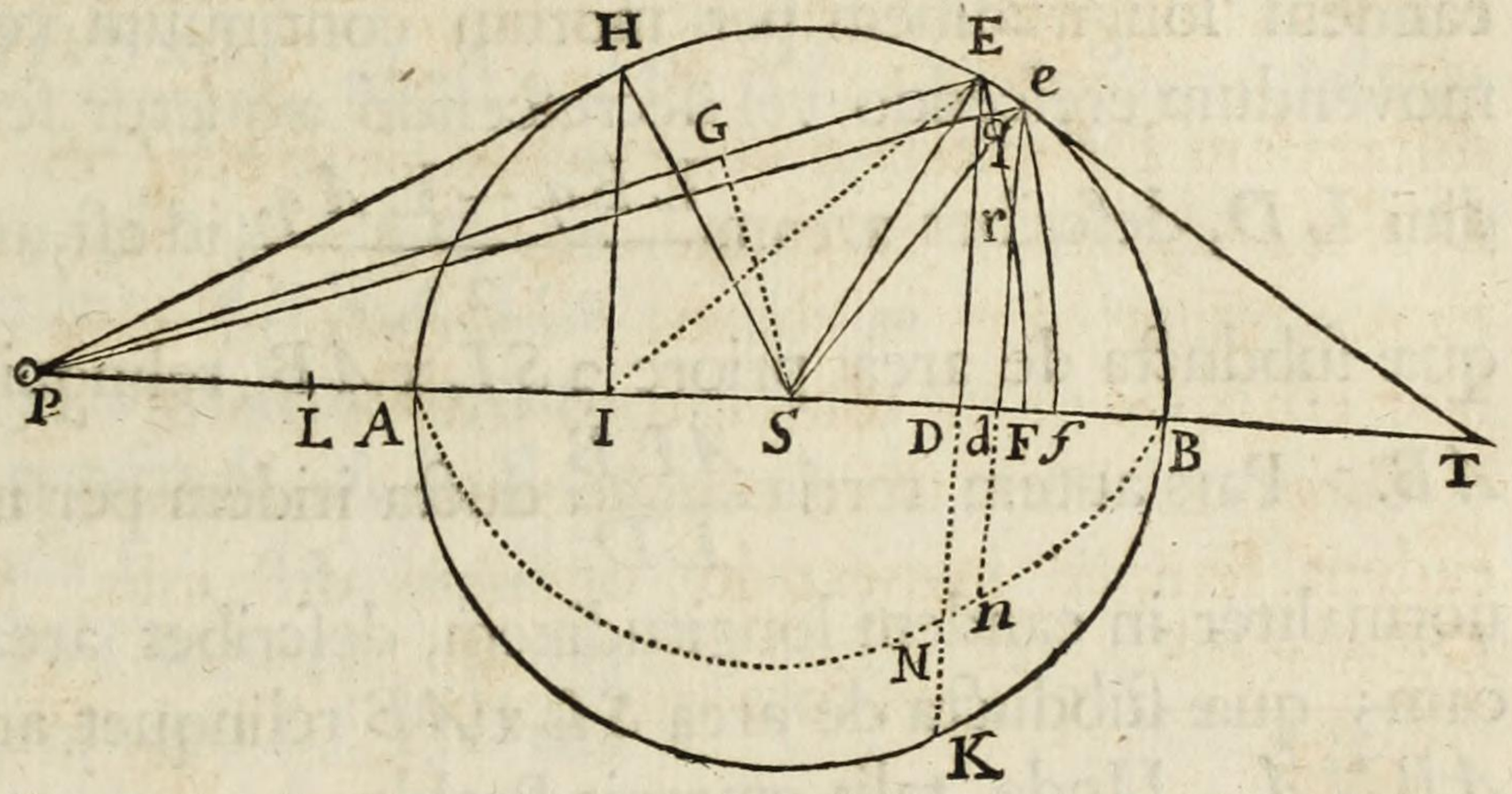
Prop. LXXXI. Prob. XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ABNA.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H, & ad axem PAB demiſſa Normali HI, biſecetur PI in L; & erit

(per

(per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) $PEq.$ æquale $PSq. + SEq. + 2PSD.$ Eſt autem $SEq.$ ſeu $SHq.$ (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo $PSI.$ Ergo $PEq.$ æquale eſt contento ſub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc eſt, ſub PS & $2LS + 2SD$, id eſt, ſub PS & $2LD.$ Porro DE *quad* æquale eſt $SEq. - SDq.$

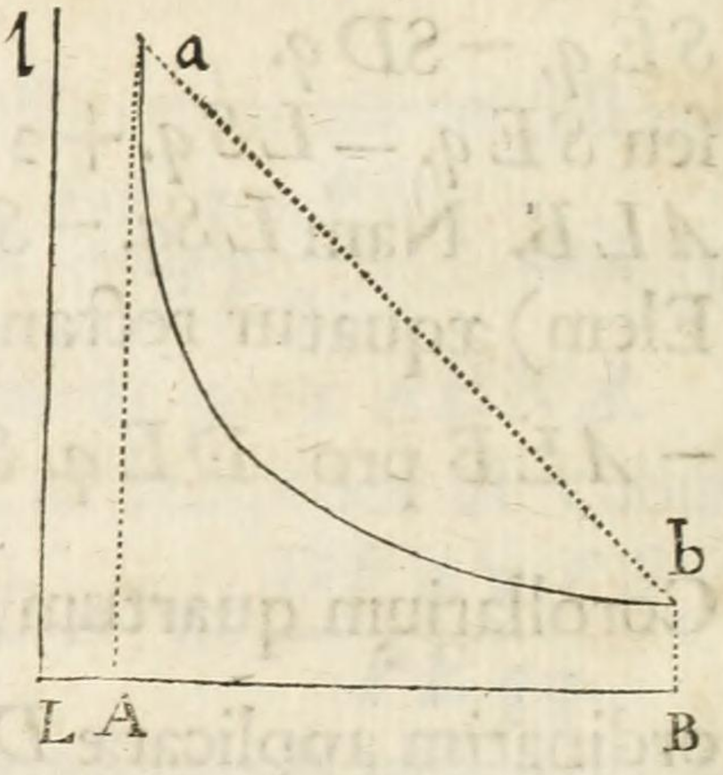


ſeu $SEq. = LSq. + 2SLD = LDq.$ id eſt, $SLD - LDq. - ALB.$ Nam $LSq. - SEq.$ ſeu $LSq. - SAq.$ (per Prop. 6 Lib. 2. Elem) æquatur rectangulo $ALB.$ Scribatur itaq; $2SLD - LDq. - ALB$ pro $DEq.$ & quantitas $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundum Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq. \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innoteſcunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE, dein $2PS \times LD$ pro $PEq.$, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$

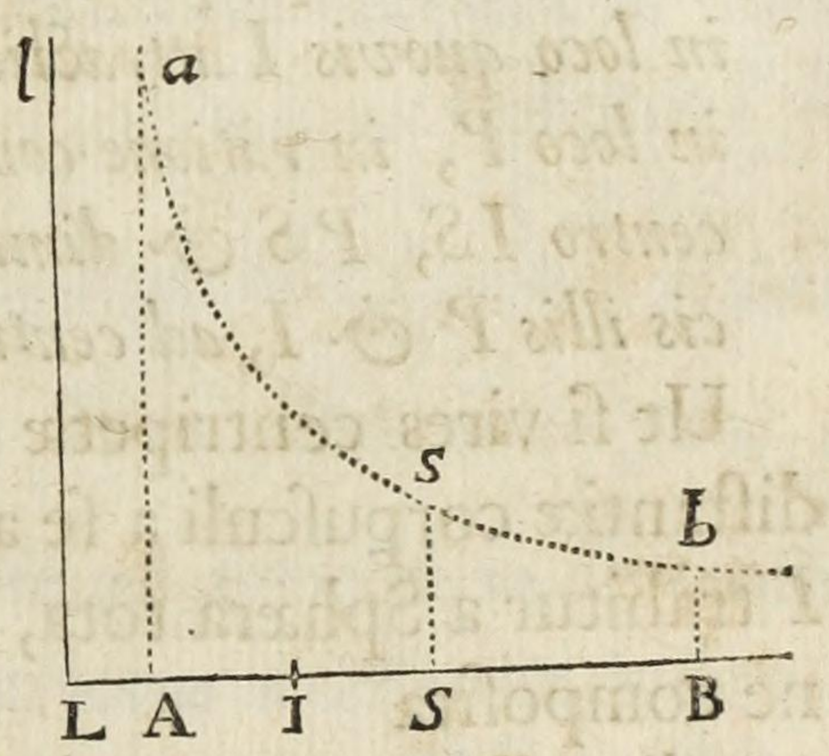
Pone

Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, describet aream $\frac{LBq. - LAq.}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB, per puncta a, b describatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\,cub.}{2ASq.}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro $PEq.$; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq.}{PS \times LD} - \frac{ASq.}{2PS} - \frac{ALB \times ASq.}{2PS \times LDq.}$ id est (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq.}$. Si ducantur hujus partes tres

tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq.}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ ac tertiæ, & manebit area quæſita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perq; punctum s Aſymptotis Ll, LB deſcribatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$.



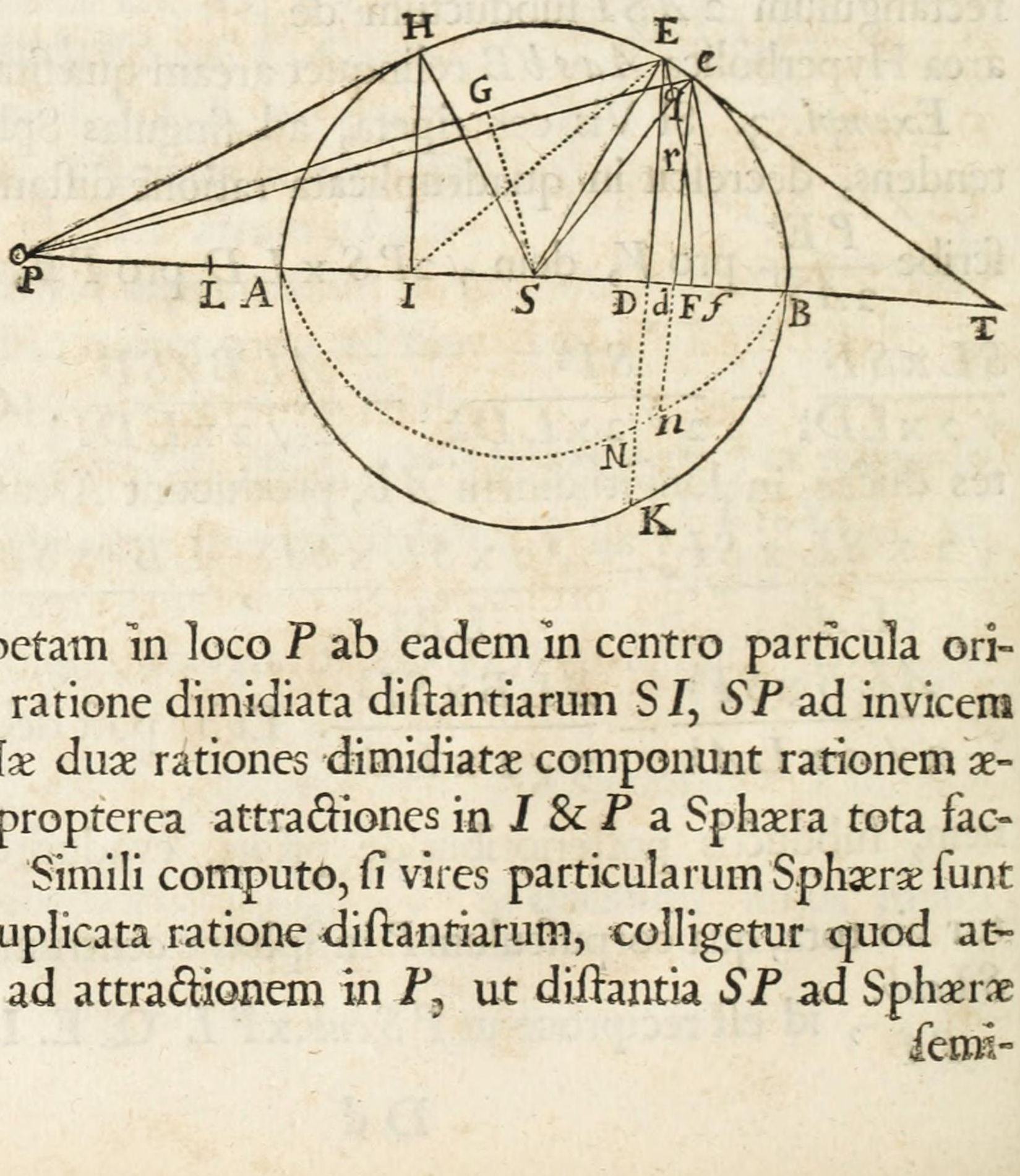
Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad ſingulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis, ſcribe $\frac{PE^4}{2AS^3}$ pro V, dein $\sqrt{2}PS \times LD$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SL \times SI^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \times LD^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \times LD^{\frac{1}{2}}} - \frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \times LD^{\frac{5}{2}}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt Areas totidem, *viz.* $\frac{\sqrt{2} \times SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{LA^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{2} \times SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{LB^{\frac{1}{2}} \times SI^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{1}{2}} \times SI^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$ & $\frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2} \times LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2} \times LB^{\frac{3}{2}}}$. Et hæ poſt debitam reductionem, ſubductis poſterioribus de priori, evadunt $\frac{8\,SI\,cub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpuſculum P in Sphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, id eſt reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. Q. E. I.

Eadem Methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra Sphæram, ſed expeditius per Theorema ſequens.

Prop. LXXXII. Theor. XLI.

In Sphæra centro S intervallo SA deſcripta, ſi capiantur SI, SA, SP continue proportionales: dico quod corpuſculi intra Sphæram in loco quovis I attractio eſt ad attractionem ipſius extra Sphæram in loco P, in ratione compoſita ex dimidiata ratione diſtantiarum a centro IS, PS & dimidiata ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.

Ut ſi vires centripetæ particularum Sphæræ ſint reciproce ut diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti; vis, qua corpuſculum ſitum in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione compoſita ex dimidiata ratione diſtantiæ *SI* ad diſtantiam *SP* & ratione dimidiata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id eſt, ratione dimidiata diſtantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes dimidiatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum Sphæræ ſunt reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad Sphæræ ſemi-



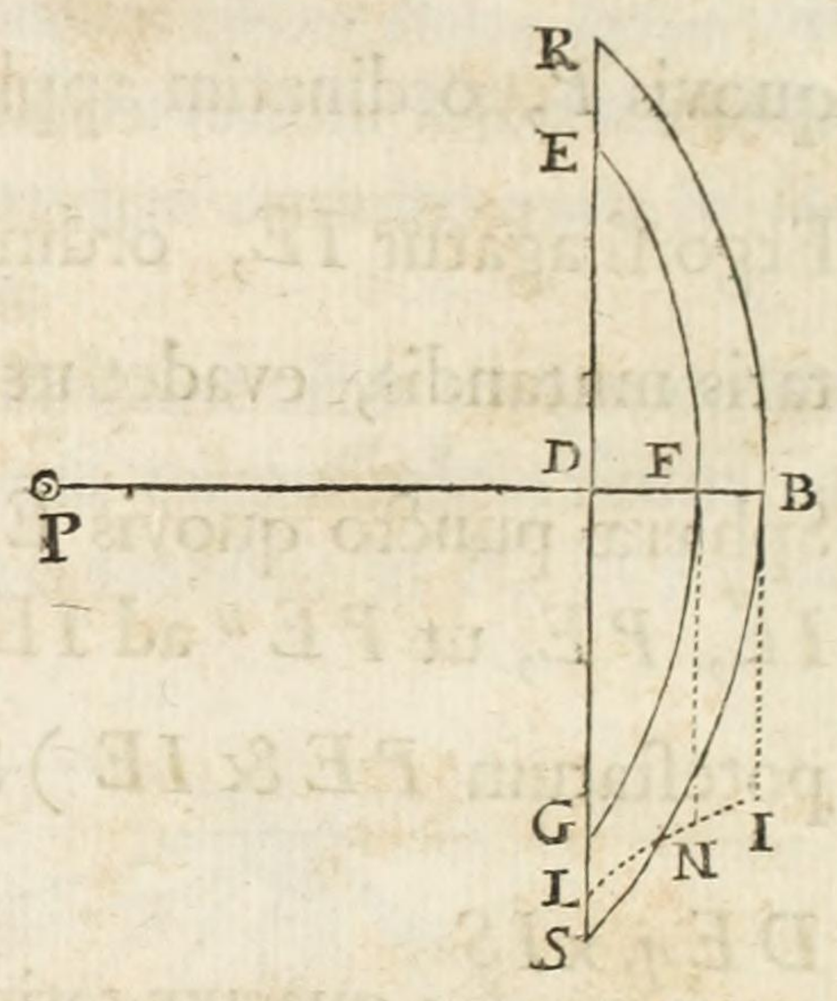
ſemidiametrum SA: Si vires illæ ſunt reciproce in triplicata ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*; ſi in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciproce ut PS *cub.*xPI, attractio in I erit reciproce ut SA *cub.*xPI, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema vero ſic demonſtratur.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq.\times PS}{PE\times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq.\times IS}{IE\times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq.\times PS}{PE\times PE^n}$ & $\frac{DEq.\times IS}{IE\times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS\times IE\times IE^n$ ad $IS\times PE\times PE^n$. Quoniam ob ſimilia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS\times IE^n$ ad $SA\times PE^n$. Sed PS ad SA dimidiata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n dimidiata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſq; proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.

Invenire vim qua corpuſculum in centro Sphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunq; attrahitur.

Sit *P* corpus in centro Sphæræ, & *RBSD* ſegmentum ejus plano *RDS* & ſuperficie Sphærica *RBS* contentum. Superficie Sphærica *EFG* centro *P* deſcripta



ſecetur *DB* in *F*, ac diſtinguatur ſegmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem ſuperficies illa non pure Mathematica, ſed Phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas *O*, & erit hæc ſuperficies (per demonſtata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa cujus Index eſt *n*; & vis qua ſuperficies *FE* trahit corpus *P* erit ut $\frac{DF \times O}{PF^{n-1}}$. Huic proportionale ſit perpendiculum *FN* ductum in *O*; & area curvilinea *BDLIB*, quam ordinatim applicata *FN* in longitudinem *DB* per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua ſegmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. Q.E.I.

Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Invenire vim qua corpuſculum, extra centrum Sphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento *EBK* trahatur corpus *P* (*Vide Fig. Prop.* 79. 80. 81.) in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* def-

deſcribatur ſuperficies Sphærica *EFK*, qua diſtinguatur ſegmentum in partes duas *EBKF* & *EFKD*. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII.; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius *EBKD*. Q. E. I.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deq; motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECT. XIII.

De Corporum etiam non Sphæricorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longe fortior ſit, quam cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicata diſtantiarum a particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum a particulis; attractio verſus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ attracti

tracti corporis a centro Sphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atq; adhuc minus augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur Propoſitio de Sphæris attractivis. Et par eſt ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in Orbibus corpora interius conſtituta trahentibus, cum attractiones paſſim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quod ſi Sphæris hiſce Orbibuſq; Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cum ſint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum qui ex contactu oritur. Conſtat igitur Propoſitio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicata vel pluſquam triplicata ratione diſtantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI. in Exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter ſe collata, facile colligitur de attractionibus corporum verſus Orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra Orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia & ex materia æqualiter attractiva conſtantia ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & diſtantiarum dignitates illæ inverſe. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* adeoq; tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$ id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$ id eſt æquales. Si vires decreſcunt in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,qq.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,qq.}$ id eſt reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

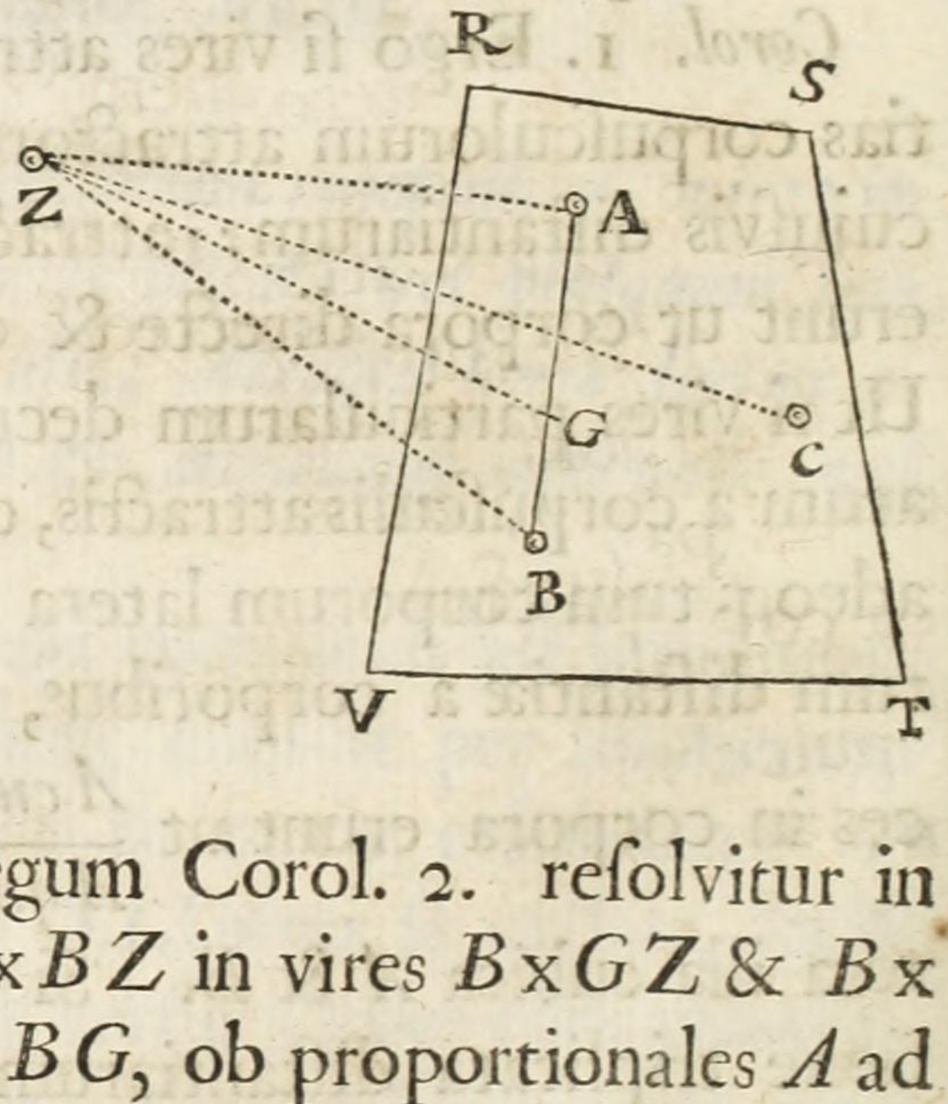
Corol.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuſcunq; vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa *A*x*AZ* & *B*x*BZ*. Jungatur *AB*, & ſecetur ea in *G* ut ſit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; & erit *G* commune centrum gravitatis particularum *A* & *B*. Vis *A*x*AZ* per Legum Corol. 2. reſolvitur in vires *A*x*GZ* & *A*x*AG*, & vis *B*x*BZ* in vires *B*x*GZ* & *B*x*BG*. Vires autem *A*x*AG* & *B*x*BG*, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur, adeoq;, cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires *A*x*GZ* & *B*x*GZ*. Tendunt hæ ab *Z* verſus centrum *G*, & vim *A*+*B*x*GZ* componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ *A* & *B* conſiſterent in eorum communi gravitatis centro *G*, globum ibi componentes.



Eo-

Eodem argumento ſi adjungatur particula tertia *C*; & componatur hujus vis cum vi $A+B\times GZ$ tendente ad centrum *G*, vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius *G* & particulæ *C*; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum *A*, *B*, *C*; & eadem erit ac ſi globus & particula *C* conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunq; *RSTV* ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti *Z* idem erit ac ſi corpus attrahens *RSTV* eſſet Sphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunq; trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

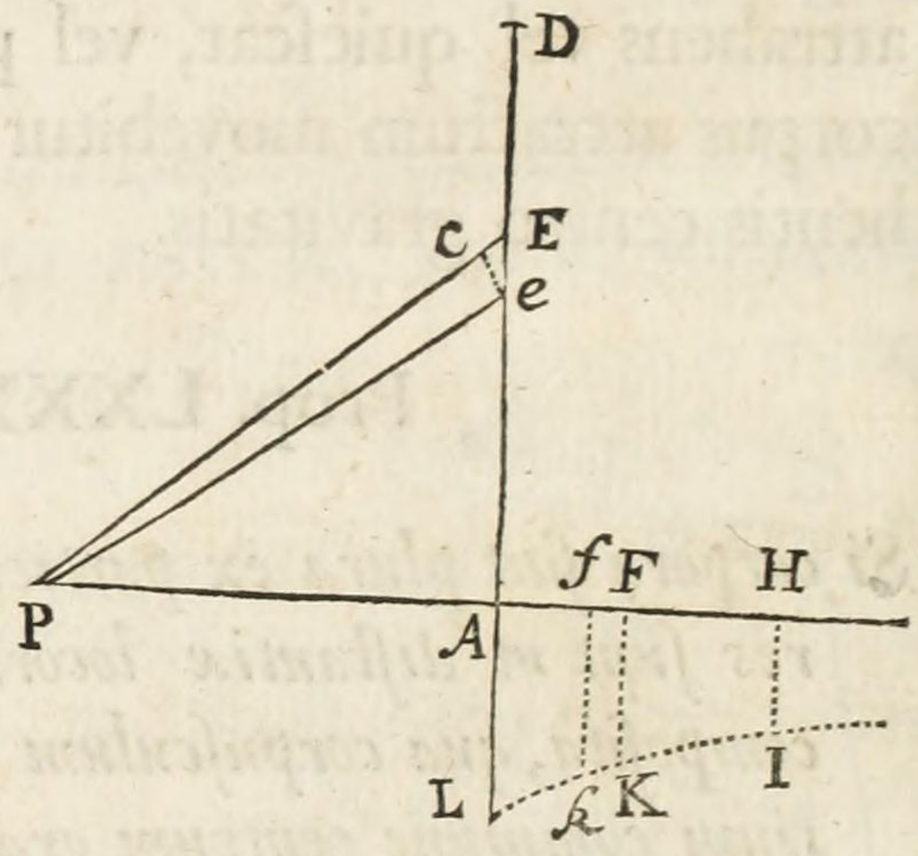
Demonſtratur eodem modo, atq; Propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoq; ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

Prop. XC. Prob. XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunq; puncta tendant vires centripetæ decreſcentes in quacunq; diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpuſculum attrahitur ubivis in recta quæ ad planum circuli per centrum ejus perpendicularis conſiſtit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur circulus; & invenienda ſit vis qua corpus quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpus attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipſi *PE* æqualis, & erigatur Normalis *FK*, quæ ſit ut vis qua punctum *E* trahit corpuſculum *P*. Sitq; *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpuſculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. Q. E. I.



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PA* capiatur *Pf* ipſi *Pe* æqualis. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis *E* trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* verſus *A*, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE*, *Ee* & *cE*) æquatur rectangulo *PE* x *cE*

$\times cE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atq; adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

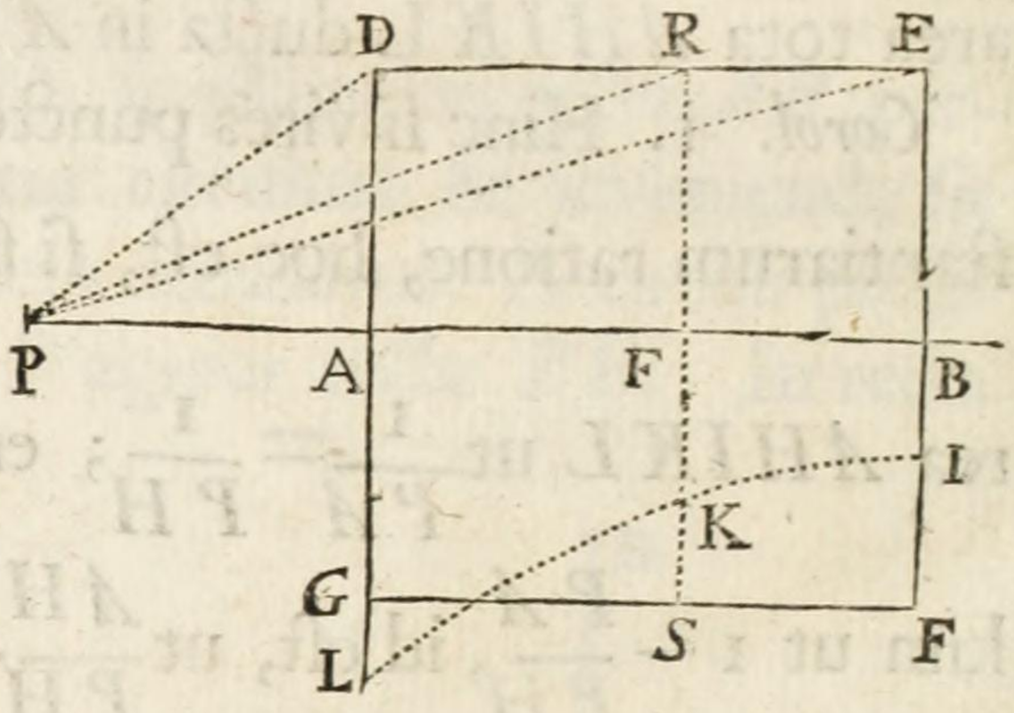
Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoq; area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi, ad cujus puncta singula tendunt vires centripetæ in quacunq; distantiarum ratione decrescentes.

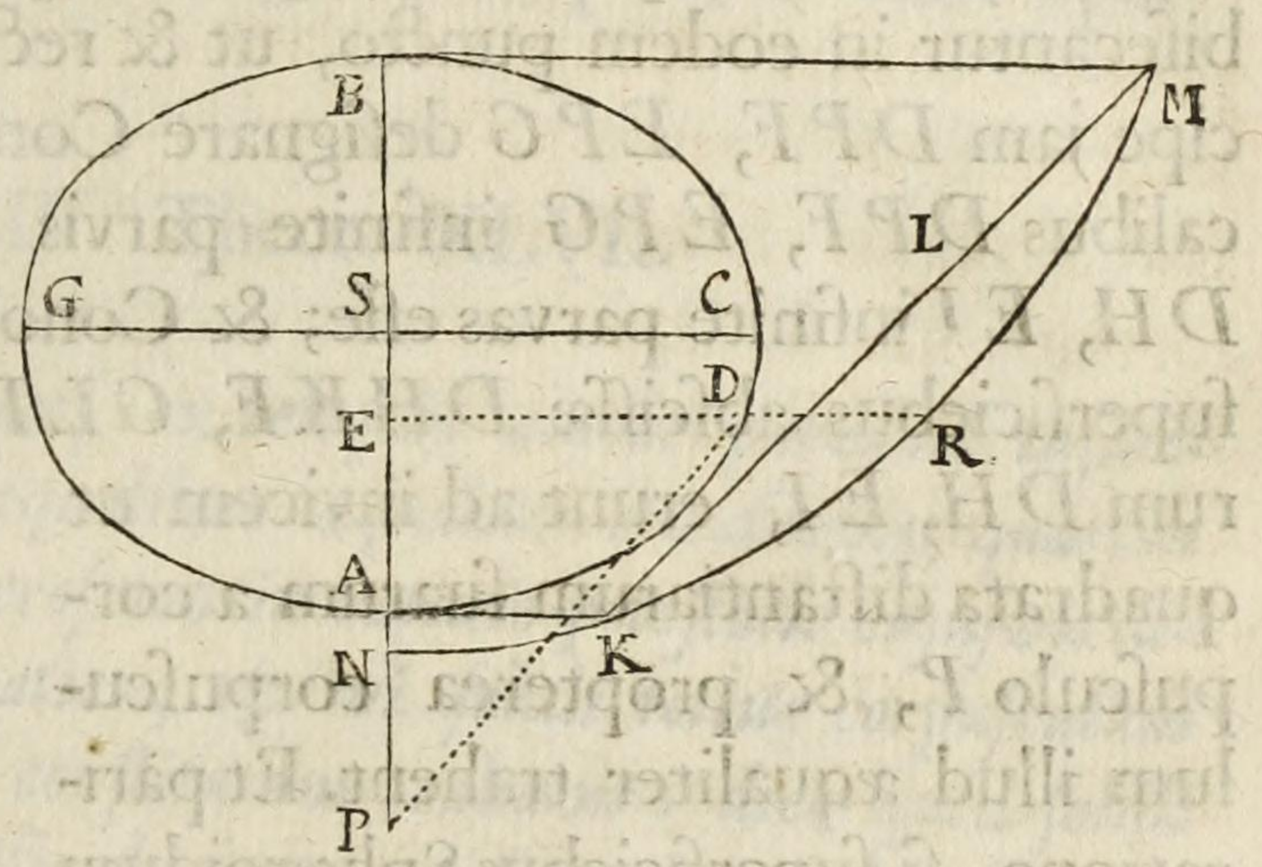
In ſolidum *ADEFG* trahatur corpuſculum *P*, ſitum in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari ſecetur hoc ſolidum, & in ejus diametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem tranſeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo *FK* vi qua corpuſculum *P* in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *A* & *B*; & erit attractio corpuſculi *P* in ſolidum ut area *LABI*. Q. E. D.



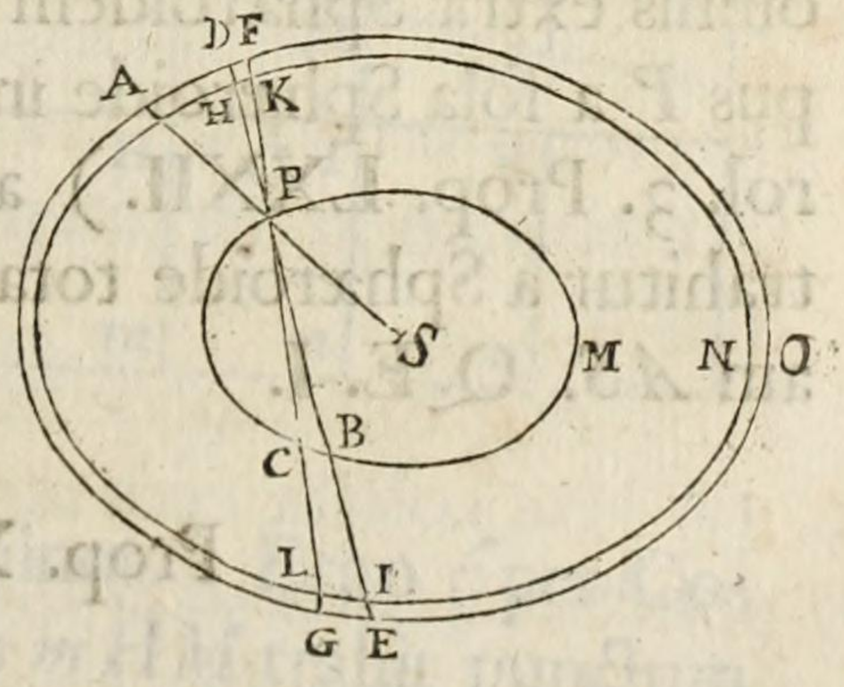
Corol. 1. Unde ſi ſolidum Cylindrus ſit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciproce ut quadrata diſtantiarum a punctis: erit attractio corpuſculi *P* in hunc Cylindrum ut $BA - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *FK* (per Corol. 1. Prop. XC) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, deſcribit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem *PB*, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ *LKI* quadratura facile oſtendi poteſt:) & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem *PA* deſcribit aream 1 in $PD - AD$, ductaq; in ipſarum *PB*, *PA* differentiam *AB* deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $PE - PD$, & reſtabit area *LABI* æqualis 1 in $AB - PE + PD$. Ergo vis huic areæ proportionalis eſt ut $AB - PE + PD$.

Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit qua Sphærois *AGBCD* attra-

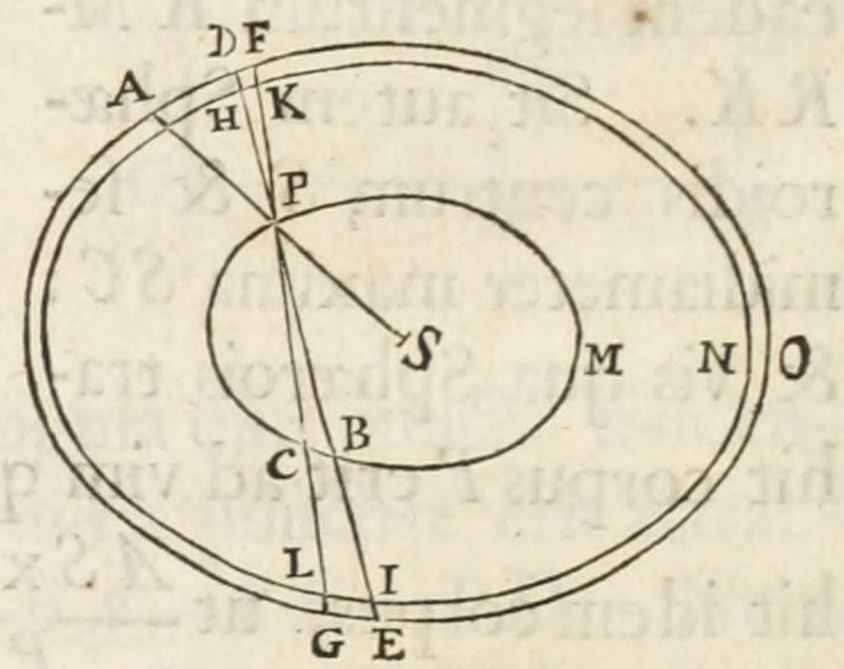
trahit corpus quodvis *P*, exterius in axe ſuo *AB* ſitum. Sit *NK-RM* Sectio Conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipſi *PE* perpendicularis, æquetur ſemper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata iſta Sphæroidem ſecat. A Sphæroidis verticibus *A*, *B* ad ejus axem *AB* erigantur perpendicula *AK*, *BM* ipſis *AP*, *BP* æqualia reſpective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in *K* & *M*; & jungantur *KM* auferens ab eadem ſegmentum *KM-RK*. Sit autem Sphæroidis centrum *S* & ſemidiameter maxima *SC*: & vis qua Sphærois trahit corpus *P* erit ad vim qua Sphæra, diametro *AB* deſcripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq. - PS \times KMRK}{PSq. + CSq. - ASq.}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3\,PS\ quad.}$. Et eodem computando fundamento invenire licet vires ſegmentorum Sphæroidis.



Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra Sphæroidem in data quavis ejuſdem diametro collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit *AGOF* Sphærois attrahens, *S* centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum ſemidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* Sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*: Sintq; *PCM*, *HLN* ſuperficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tran-



tranſeat per corpus *P* & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare Conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas eſſe; & Conorum particulæ Sphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum a corpuſculo *P*, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus Sphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinq; æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni *DPF* & ſegmenti Conici *EGCB*, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a ſola Sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, qua corpus *A* trahitur a Sphæroide tota *AGOD*, ut diſtantia *PS* ad diſtantiam *AS*. Q. E. I.



Prop. XCII. Prob. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

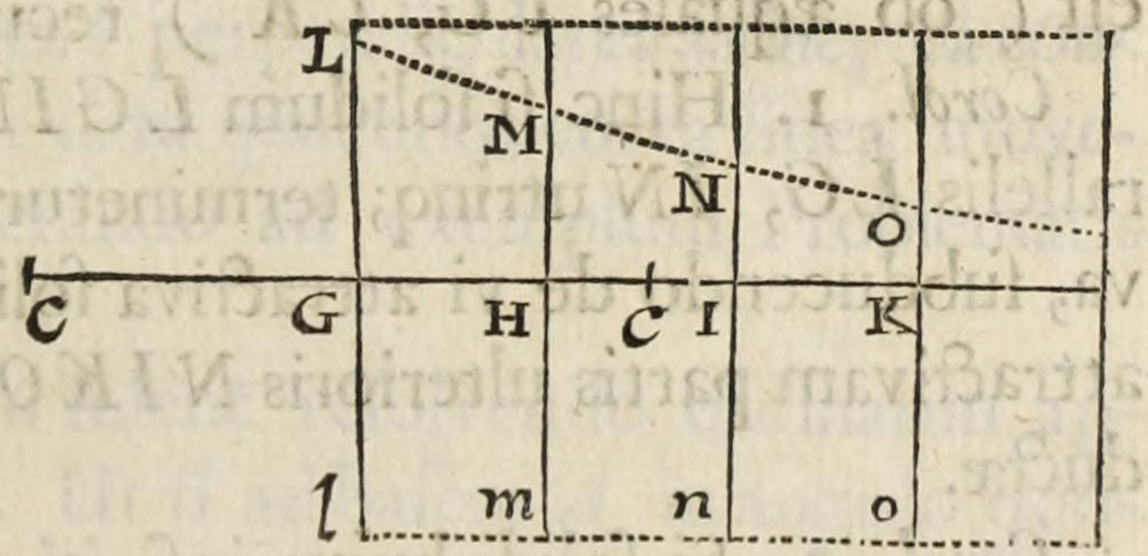
E corpore dato formanda eſt Sphæra vel Cylindrus aliave figura

ra regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

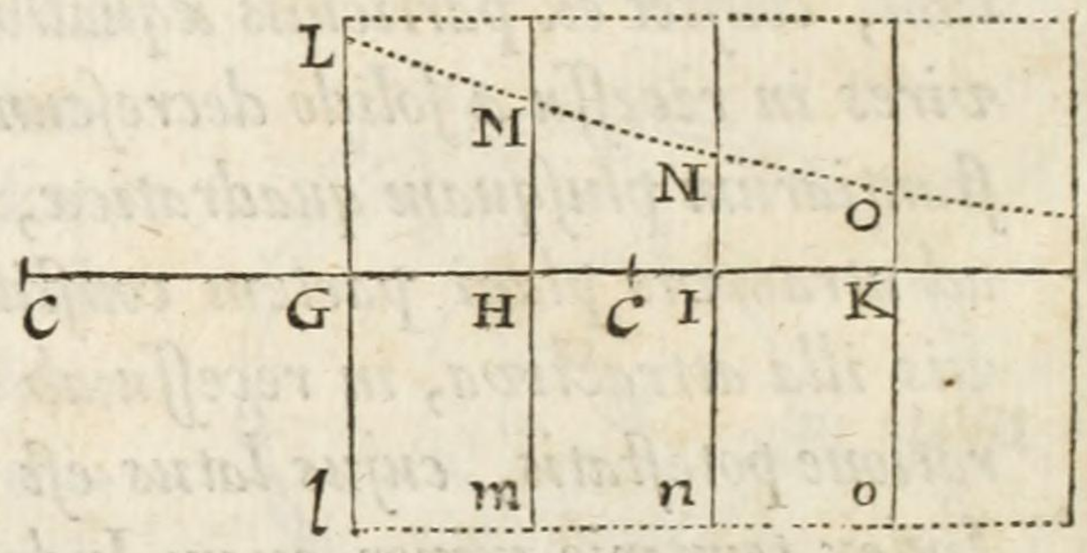
Cas. 1. Sit *L G l* planum quo Solidum terminatur. Jaceat autem solidum ex parte plani hujus versus *I*, inq; plana innumera *m HM*, *n IN* &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra solidum. Agatur autem *C GHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum,



cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis qua planum quodvis *m HM* trahit punctum *C* est reciproce ut CH^{n-2}. In plano *m HM* capiatur longitudo *HM* ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis singulis *l* GL, *n IN*, *o K O* &c, capiantur

antur longitudines GL, IN, KO &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2} &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoq; ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis ſolidi totius ut area $GLOK$ in infinitum verſus OK producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos eſt reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis ſolidi totius eſt reciproce ut CG^{n-3} Q. E. D.

Cas. 2. Collocetur jam corpuſculum C ex parte plani lGL intra ſolidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et ſolidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpuſculum C in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum C ſola vi ſolidi ultra planum OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per Caſum primum) eſt reciproce ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-3}. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi ſolidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinq; terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva ſolidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus cor-

corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet, propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum linea s perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunq; curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit; Suppono baſem augeri par-

te quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{n}{m}OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn}O^2A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atq; hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est termino $\frac{mm-mn}{2nn}O_2\overline{A}^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^\circ$, adeoq; dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2B^{-3}$ seu $\frac{2}{B\,cub.}$: adeoq; vi, quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SECT.

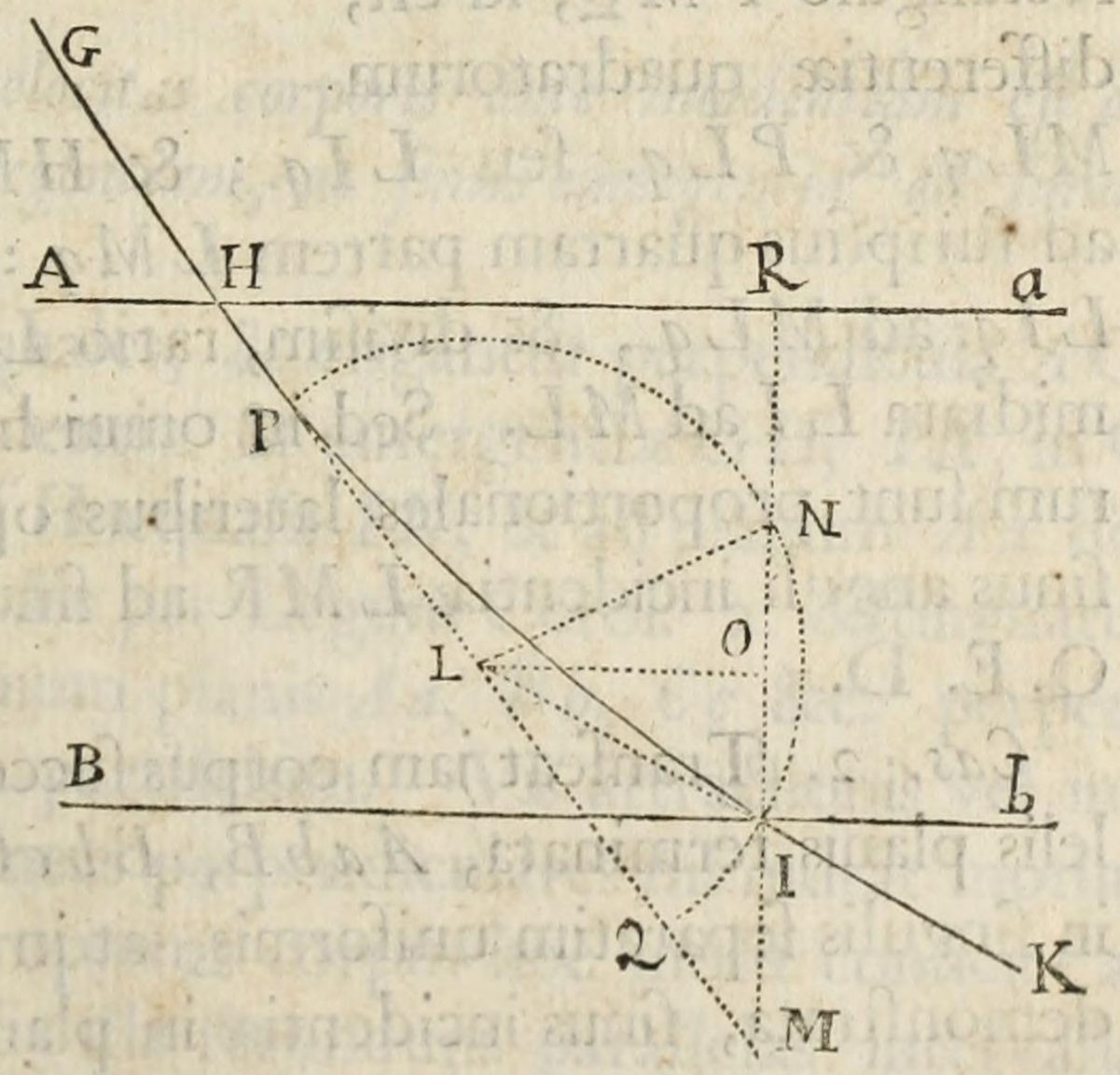
SECT. XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

Prop. XCIV. Theor. XLVIII.

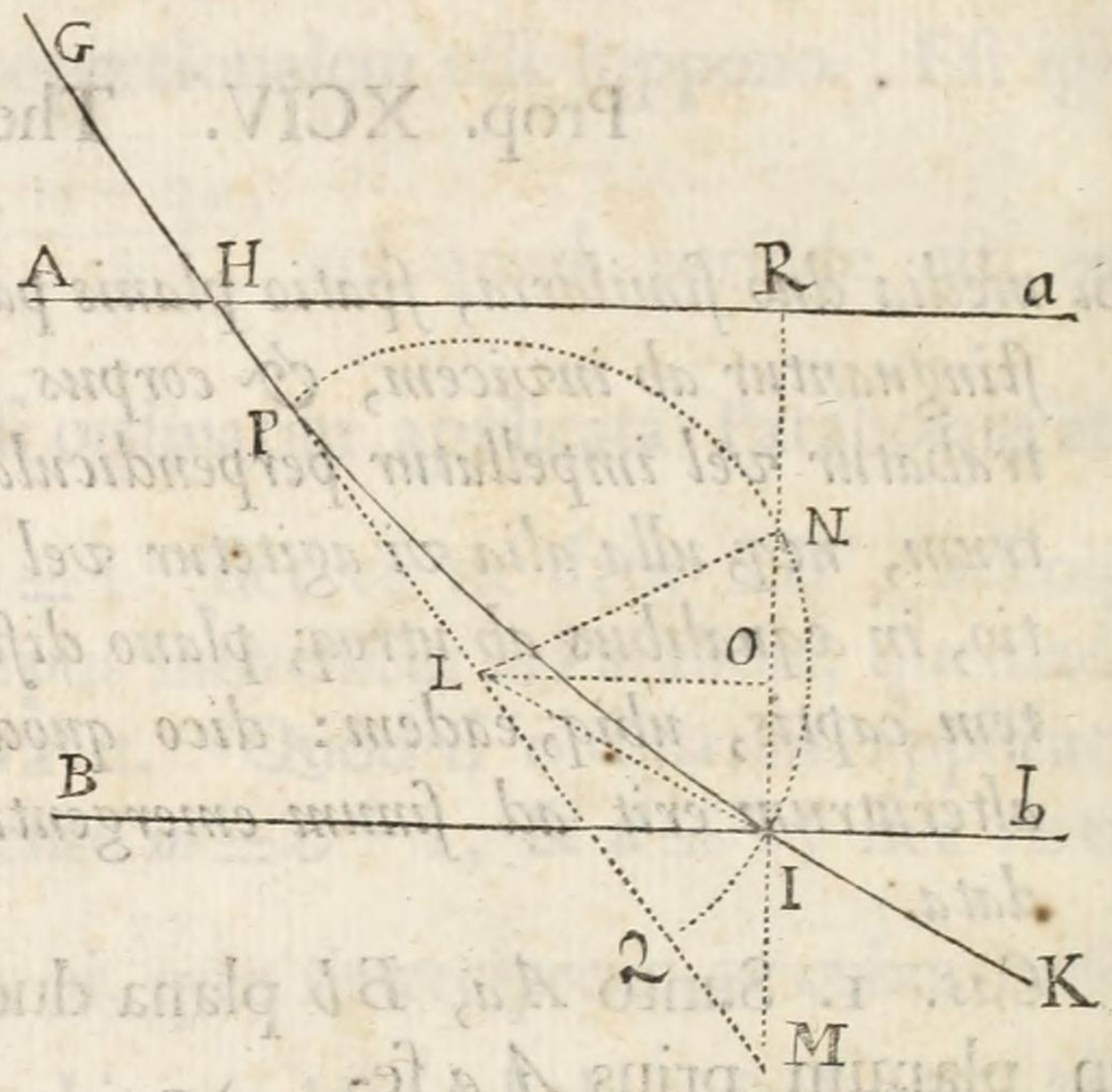
Si media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinq; terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neq; ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem attractio, in æqualibus ab utroq; plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubiq; eadem: dico quod ſimus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto *A a*, *B b* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *A a* ſecundam lineam *G H*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eaq; actione deſcribat lineam curvam *H I*, & emergat ſecundum lineam *I K*. Ad planum emergentiæ *B b* erigatur perpendiculum *I M*, occurrens tum lineæ incidentiæ *G H* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *A a* in *R*; & linea emergentiæ *K I* producta occurrat *H M* in *L*. Centro *L* inter-



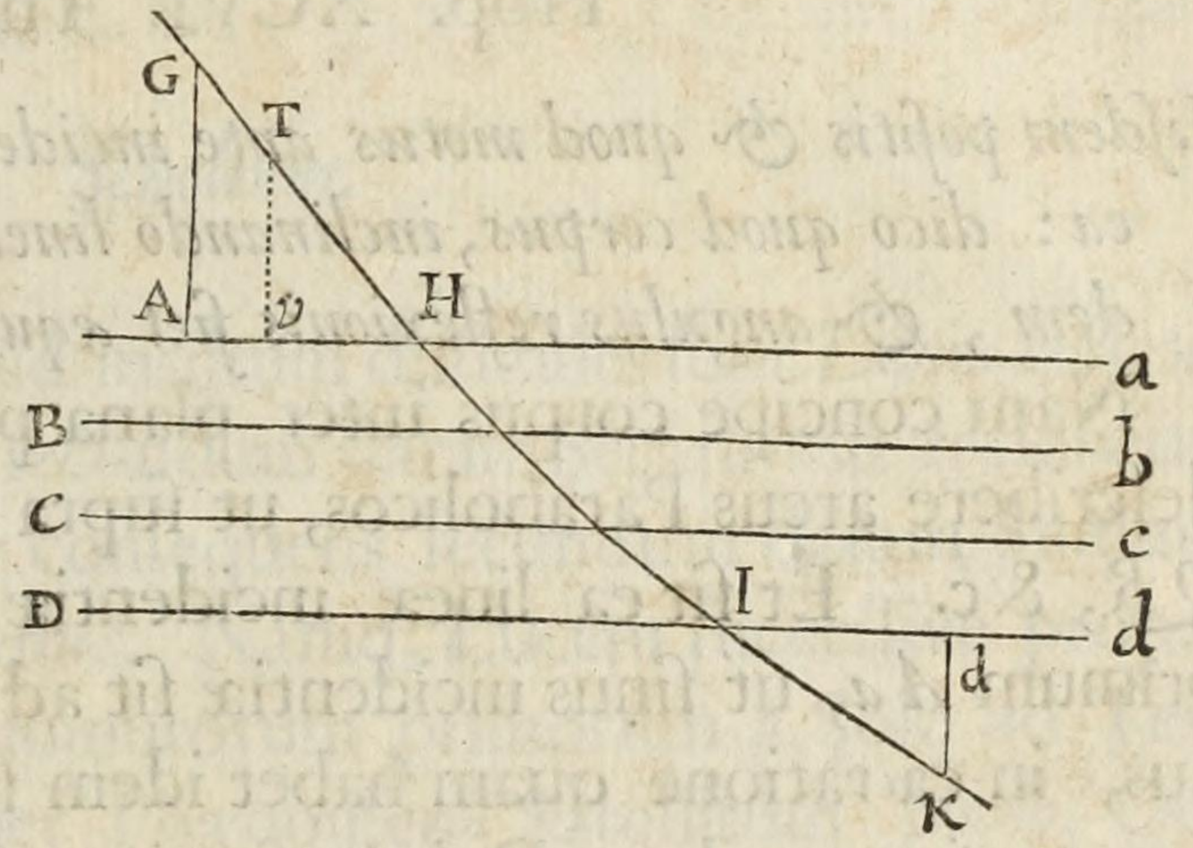
 vallo

vallo *L I* describatur circulus, secans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstatis *Galilæi*) curva *HI* Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea *IM* æquale sit *HM* quadrato; sed & linea *HM* bisecabitur in *L*. Unde si ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *IO*, *ON*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*, estq; rectangulum *NMI* ad rectangulum sub latere recto & *IM*, hoc est, ad *HMq.*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale est rectangulo *PMQ*, id est, differentiæ quadratorum *MLq.* & *PLq.* seu *LIq.*; & *HMq.* datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *LMq.*: ergo datur ratio *MLq.* — *LIq.* ad *MLq.*, & divisim, ratio *LIq.* ad *MLq.*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR* ad sinum anguli emergentiæ *LIR*. Q. E. D.



Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC* &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo *Bb*, in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum *Bb*, erit ad sinum

num emergentiæ ex plano tertio *C c*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *D d*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio ſecundum legem quamcunq; aſſignatam continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. Q. E. D.



Prop. XCV. Theor. XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

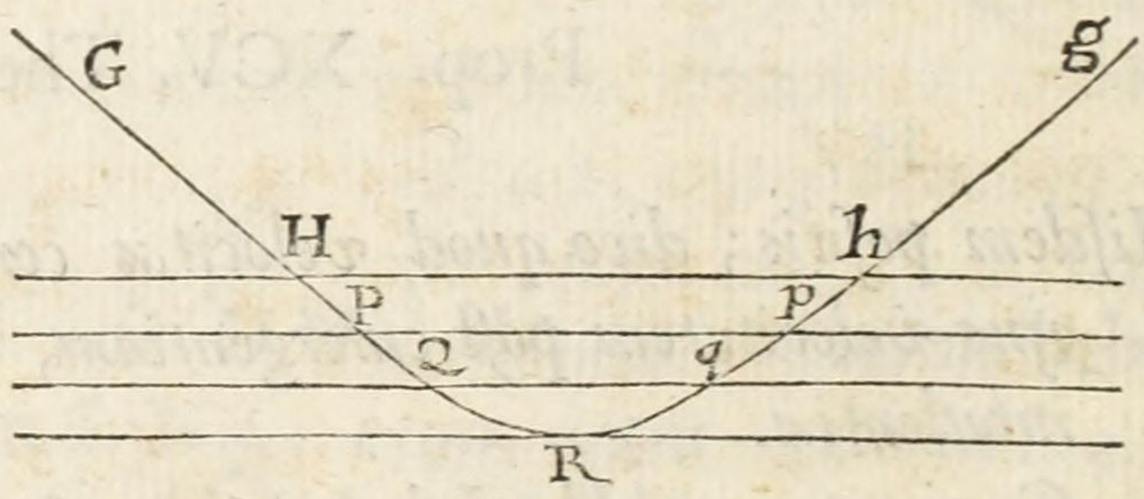
Capiantur *A H*, *I d* æquales, & erigantur perpendicula *A G*, *d K* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *G H*, *I K*, in G & *K*. In G H capiatur *T H* æqualis *I K*, & ad planum *A a* demittatur normaliter *T v*. Et per Legum Corol. 2. diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *A a*, *B b*, *C c* &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus agendo ſecundum lineas perpendiculares nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *A G* & punctum *H*, interq; punctum *I* & lineam *d K*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *G H*, *I K*.

IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *v*H, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. Q. E. D.

Prop. XCVI. Theor. L.

Iiſdem poſitis & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

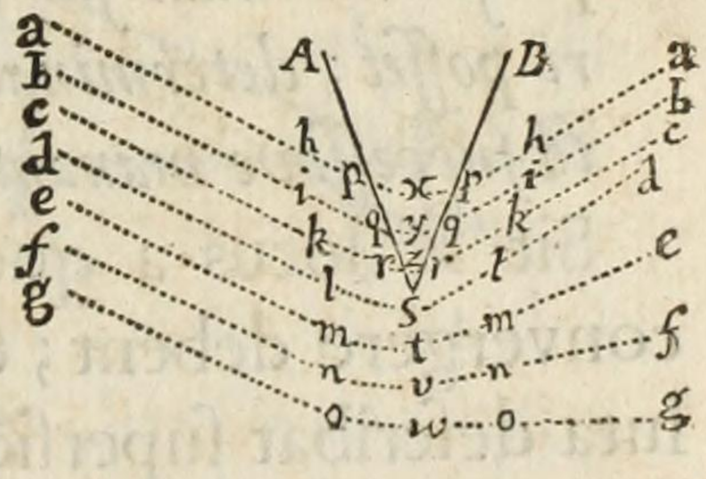
Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. deſcribere arcus Parabolicos, ut ſupra; ſintq; arcus illi H*P*, *PQ*, *QR*, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ G H obliquitas ad planum primum *Aa*, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoq; linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaq; inter plana *Cc*, *Dd* deſcribendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph* &c. arcubus prioribus *QP*, *P*H ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h* &c. ac prius in *P*, H &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in H. Concipe jam plano-



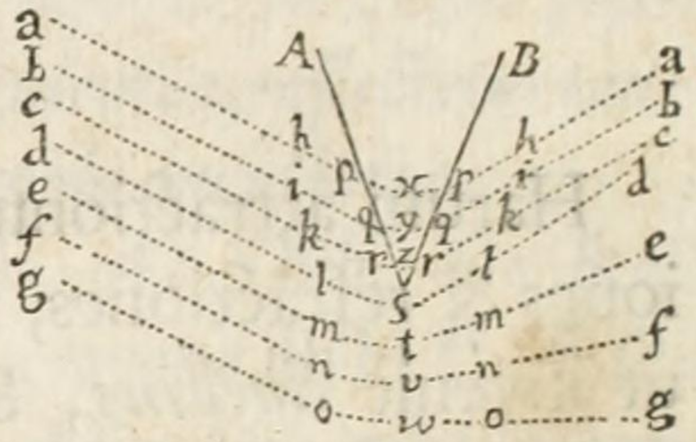
norum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namq; Lucem successive propagari & spatio quasi decem minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (ubi dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoq; expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnvnf*, *emtme*, *dlsld* sunt radii, arcubus *owo*, *nvn*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idq; magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vi-



vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *c k z k c*, *b i y i b*, *a h x h a* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



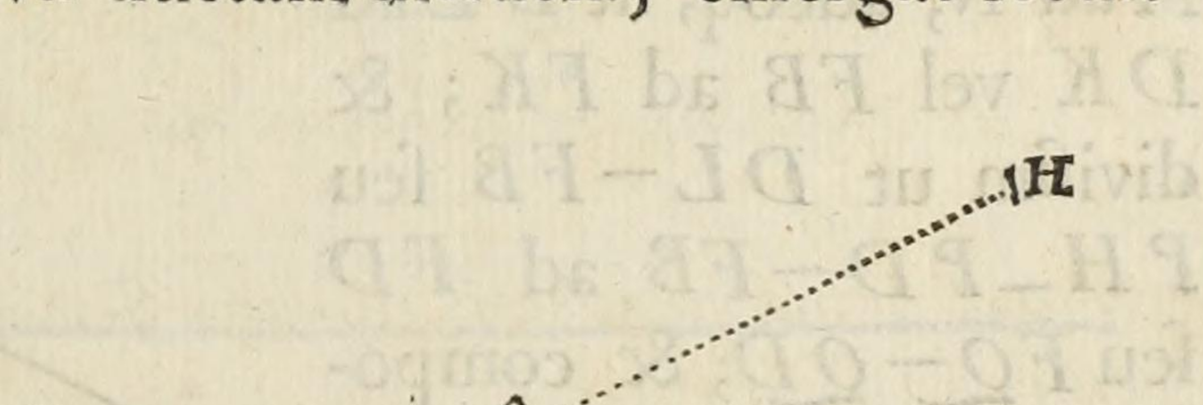
Prop. XCVII. Prob. XLVII.

Poſito quod ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in data ratione, quodq; incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari poſſit; determinare ſuperficiem quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

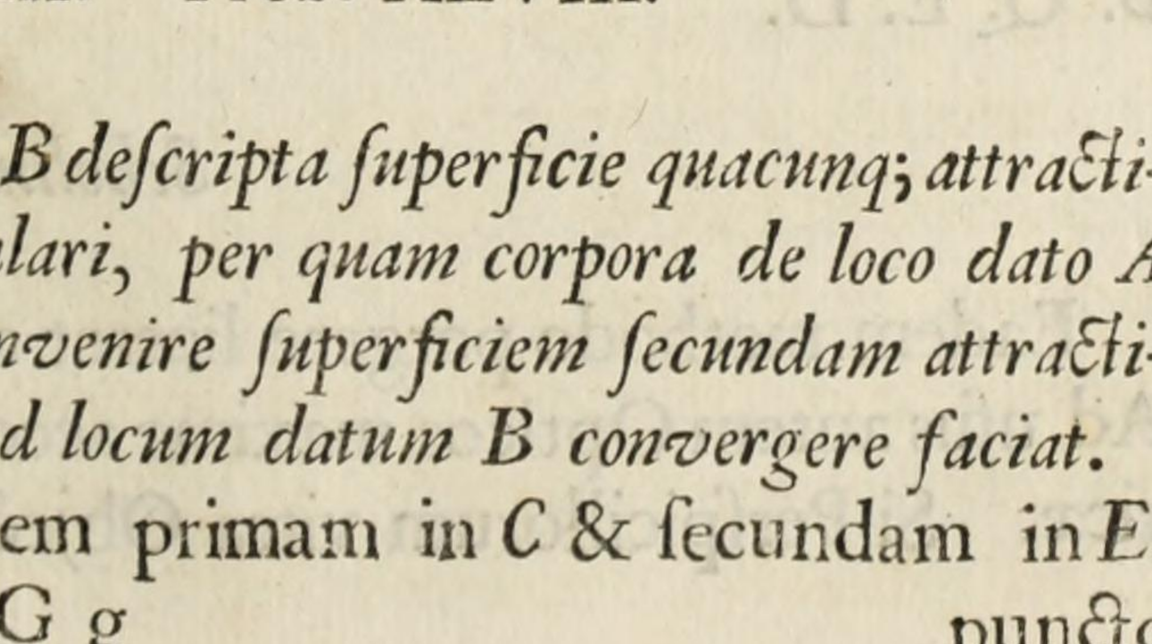
Sit *A* locus a quo corpuſcula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *C D E* curva linea quæ circa axem *A B* revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *E F*, *E G* perpendicula in corporis vias *A D*, *D B* demiſſa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *D F* qua *A D* augetur, ad lineam *D G* qua *D B* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *A D* ad decrementum lineæ *D B*; & propterea ſi in axe *A B* ſumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *C D E* tranſire debet, & capiatur ipſius *A C* incrementum *C M*, ad ipſius *B C* decrementum *C N* in data ratione; centriſq; *A*, *B*, &

B, & intervallis *AM*, *BN* deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæſitam *CDE*, eandemq; ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes quas *Carteſius* in Optica & Geometria ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* maximi fecerit & ſtudioſe celaverit, viſum fuit hic propoſitione exponere.



Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



Prop. XCVIII. Prob. XLVIII.

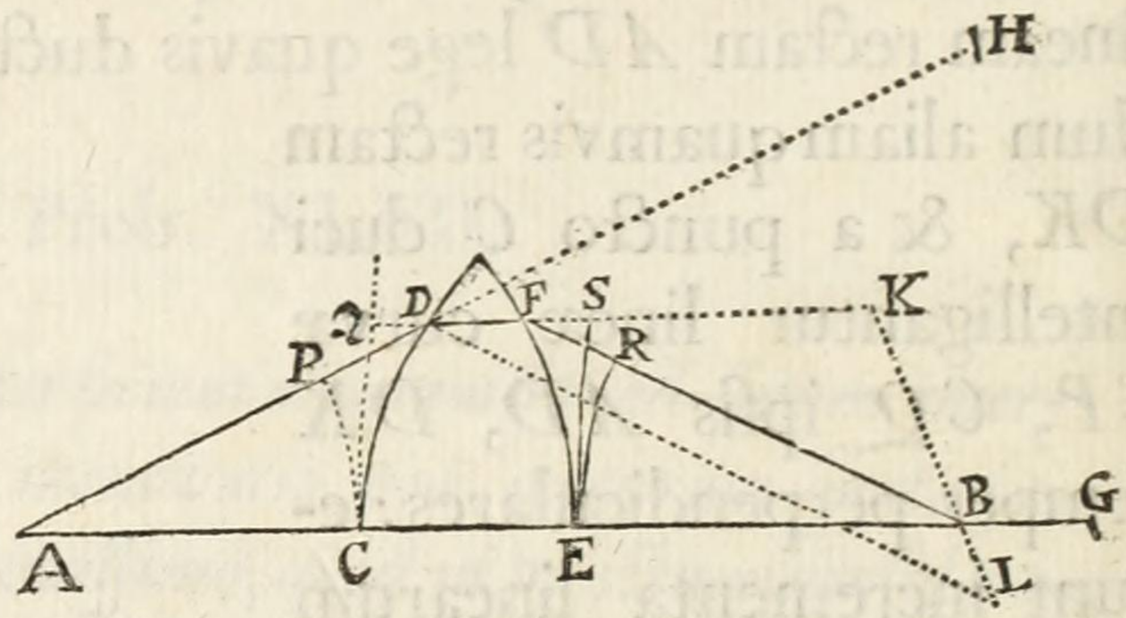
Iiſdem poſitis, & circa axem AB deſcripta ſuperficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*,

 puncto

puncto *D* utcunq; assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data *M* ad aliam datam *N*; produc tum *AB* ad *G* ut sit *BG* ad *CE* ut *M*—*N* ad *N*, tum *AD* ad *H* ut sit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut sit *DK* ad *DH* ut *N* ad *M*. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsiq; *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DF* respective, & lineas *ER*, *ES* ipsis *FB*, *FD* ubiq; perpendiculares esse, adeoq; *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut *M* ad *N*, adeoq; ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; & divisim ut *DL*—*FB* seu *PH*—*PD*—*FB* ad *FD* seu *FQ*—*QD*; & composite ut *HP*—*FB* ad *FQ*, id est (ob æquales *HP* & *CG*, *QS* & *CE*) *CE*+*BG*—*FR* ad *CE*—*FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & *M*—*N* ad *N*) est etiam *CE*+*BG* ad *CE* ut *M* ad *N*: adeoq; divisim *FR* ad *FS* ut *M* ad *N*, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. superficies *EF* cogit corpus in se secundum lineam *DF* incidens pergere in linea *FR*, ad locum *B*. Q. E. D.



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice

ce figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur, fieri poteſt ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verum tamen diverſa diverſorum radiorum refrangibilitas impedimento eſt, quo minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quaſcunq; perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE

DE MOTU CORPORUM

Liber SECUNDUS.

SECT. I.

De Motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAm cum motus ſingulis temporis particulis amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt ut itineris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amiſſus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur ſi corpus gravitate omni deſtitutum in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur, ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum, dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

Lem

Lemma. I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.

Sit A ad $A-B$ ut B ad $B-C$ & C ad $C-D$ &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D &c. Q. E. D.

Prop. II. Theor. II.

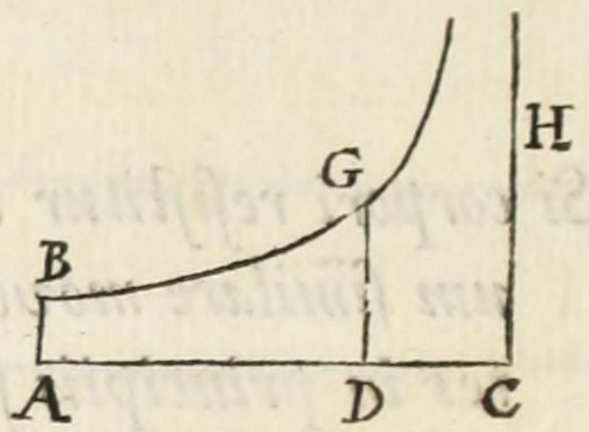
Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & ſola vi inſita per Medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione Geometrica, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales, & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas, erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. II.) continue proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continua, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea ſunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, ſunt in progreſſione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus, & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continue proportionales, erunt in hoc etiam Caſu continue proportionales. Q. E. D.

Cas.

Cas. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: Spatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ, (per Prop. I. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

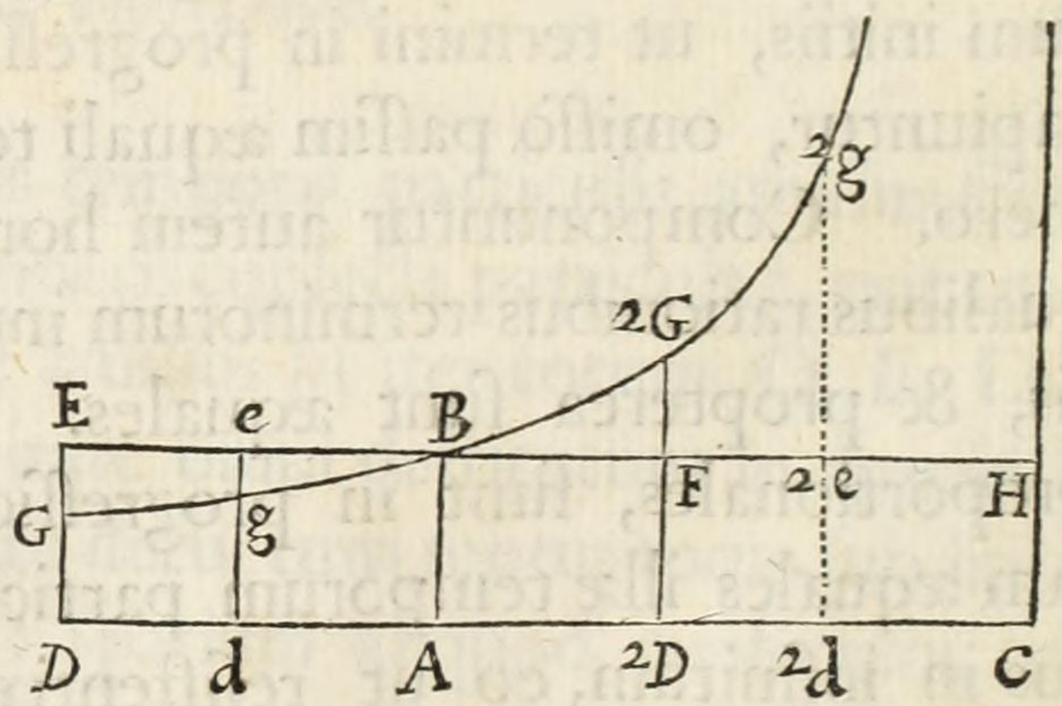
Corol. Hinc ſi Aſymptotis rectangulis *ADC*, *CH* deſcribatur Hyperbola *BG*, ſintq; *AB*, *DG* ad Aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia Medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *DC* in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione.



Prop. III. Prob. I.

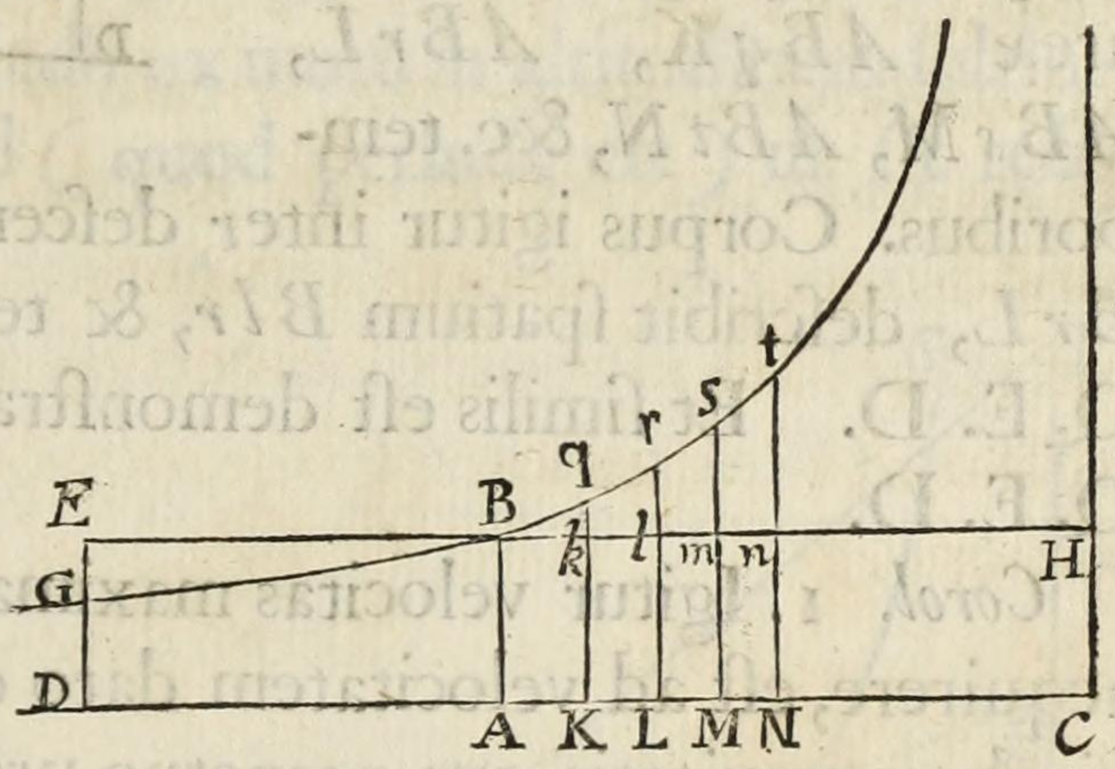
Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodq; ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BC*, & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per rectangulum *BD* ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus aſcendendo, tempore *DGgd*, deſcribet ſpatium *EGge*, tempore *DGBA* ſpatium



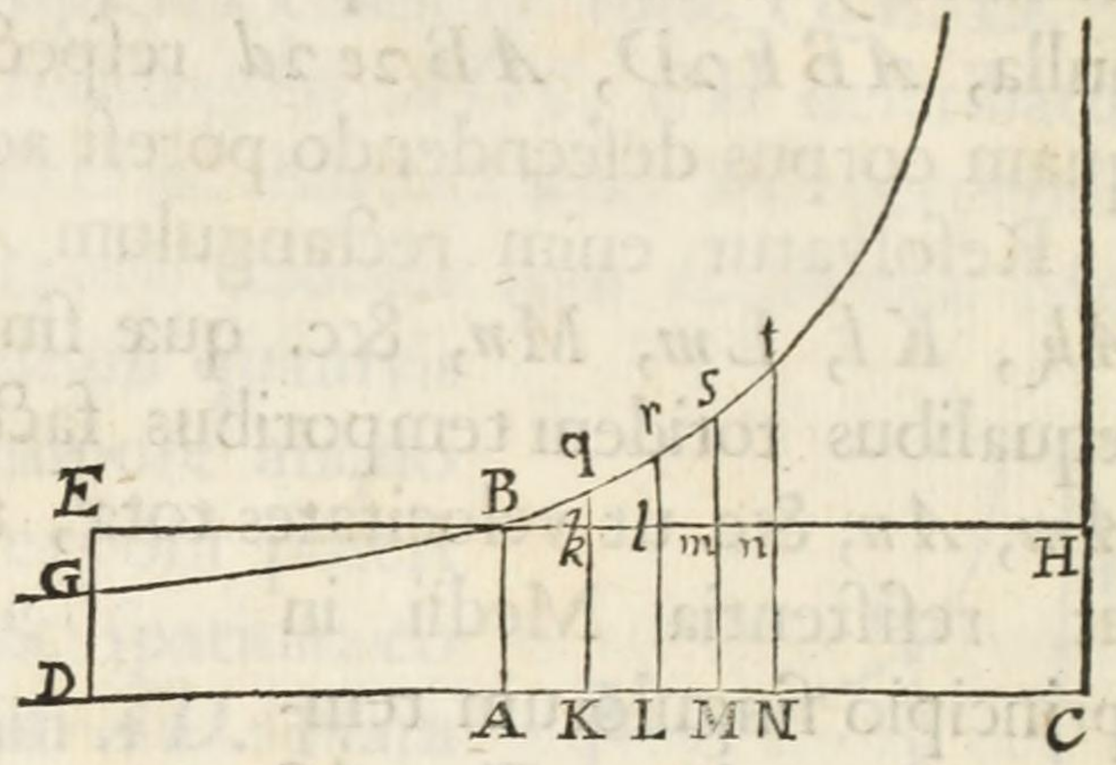
um aſcenſus totius EGB, tempore $AB2G2D$ ſpatium deſcenſus $BF2G$, atq; tempore $2D2G2g2d$ ſpatium deſcenſus $2GF2e2g$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$, nulla, $ABF2D$, $AB2e2d$ reſpective; atq; maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC.

Reſolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atq; adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentia Medii in principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deq; vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $NnHC$, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atq; adeo (per motus Legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progreſſione Geometrica. Quare ſi rectæ Kk, Ll, Mm, Nn &c. productæ occurrant Hyperbolæ in q, r, s, t &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$ &c. æquales, adeoq; tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area $ABqK$ (per Corol. 3 Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ ſeu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc eſt ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$ &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi,



ter-

tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſint viribus grauitatis analogæ, erunt areæ Bkq, $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt, (per Hypotheſin) velocitatibus, atq; adeo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis $ABrL$, deſcribit ſpatium Blr, & tempore $LrtN$ ſpatium $rlnt$. Q. E. D. Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. Q. E. D.



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad exceſſum vis hujus ſupra vim qua in fine temporis illius reſiſtitur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione Arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu (atq; etiam earundem differentia in deſcenſu) decreſcit in progreſſione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione Geometrica.

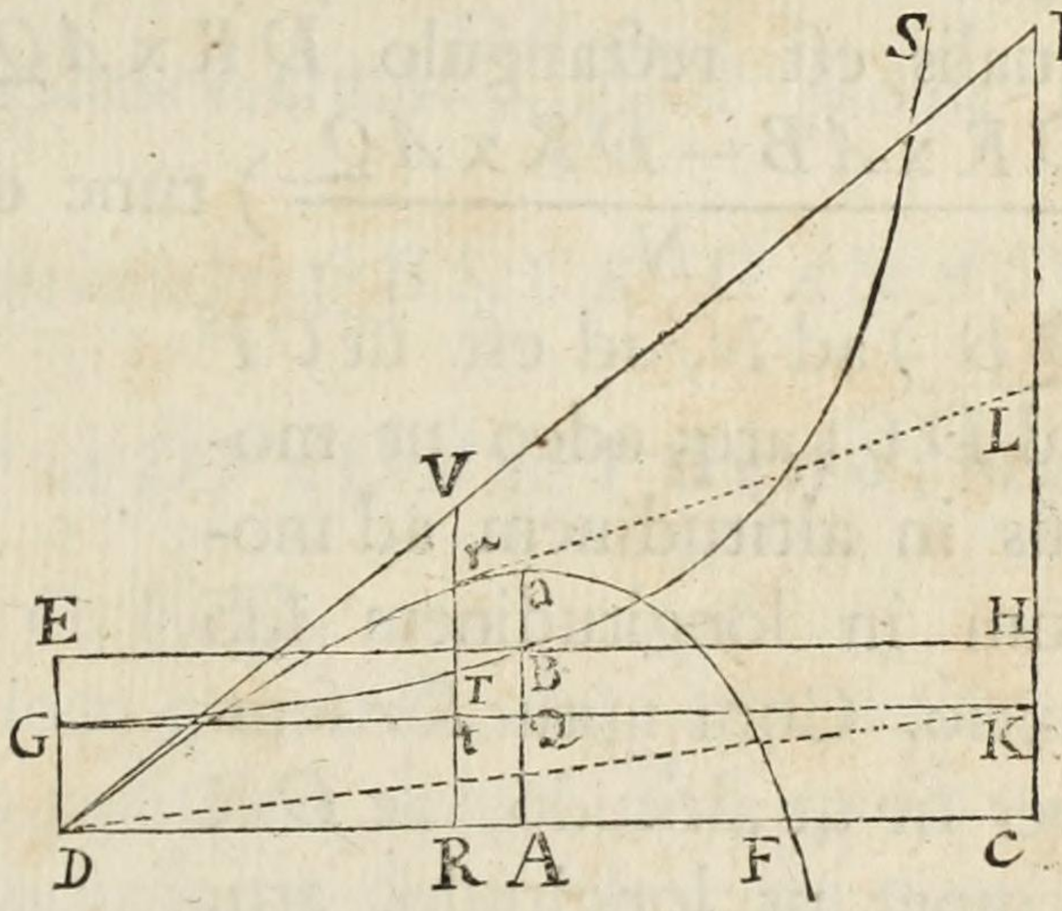
Corol. 4. Spatium vero a corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſus initio æquantur inter ſe.

Prop.

Prop. IV. Prob. II.

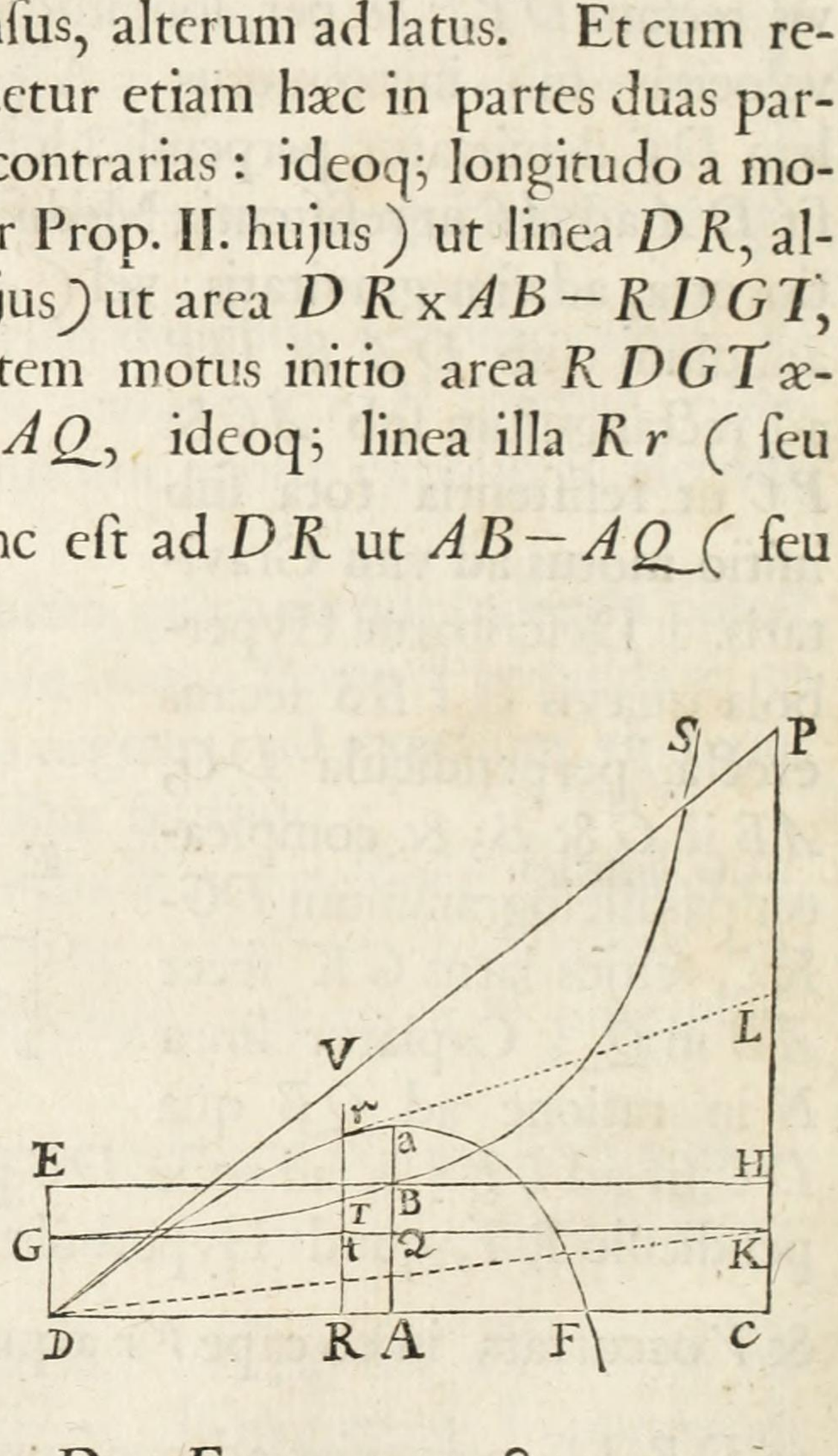
Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis, in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A* ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia Medii ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *PC* ut resistentia tota sub initio motus ad vim Gravitatis. Describatur Hyperbola quævis *GTBS* secans erecta perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea *N* in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *GK*, *DP* in *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $\frac{tGT}{N}$, & Projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, describens curvam lineam *DraF*, quam punctum *r* semper tangit; perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & postea semper



appropinquans ad Aſymptoton PLC. Eſtq; velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. Q. E. D.

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, adeoq; RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - IGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cum reſiſtentia ſit ut motus, diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias : ideoq; longitudo a motu ad latus deſcripta erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc eſt ut linea Rr. Ipſo autem motus initio area $RDGT$ æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoq; linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ (ſeu QB) ad N, id eſt ut CP ad DC; atq; adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cum igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atq; Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $Dr\,a\,F$, quam punctum r perpetuo tangit. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi Vertice D, Diametro DE deorſum producta, & latere recto quod ſit ad $2DP$ ut reſiſtentia tota, ipſo motus

tus initio, ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D ſecundum rectam DP, ut in Medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam $DraF$, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco D, ſecundum eandem rectam DR, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem, quæ, ſi duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G, parallela eſt ipſi DK, ideoq; Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq. \times CK \times CP}{2CDq. \times Q}$, id eſt (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq. \times CK \times CP}{2DPq. \times QB}$. & Latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr.}$ prodit $\frac{2DPq. \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq. \times DA}{AC \times CP}$, adeoq; ad $2DP$ ut $DP \times DA$ ad $PC \times AC$; hoc eſt ut reſiſtentia ad gravitatem. Q. E. D.

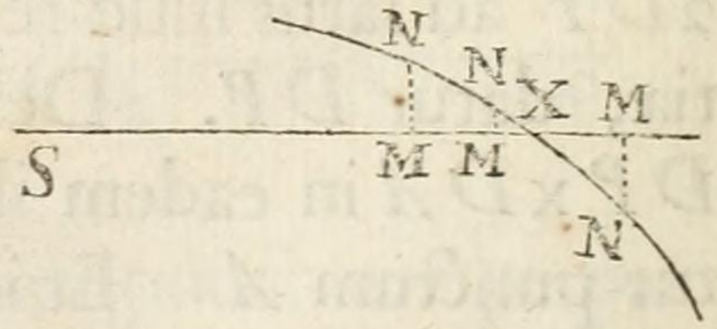
Corol. 2. Unde ſi corpus de loco quovis D, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam DP projiciatur, & reſiſtentia Medii ipſo motus initio detur, inveniri poteſt Curva $DraF$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo $2DP$ ad latus illud rectum ut eſt vis Gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione Gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.

Corol. 3. Et contra, ſi datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia Medii in locis ſingulis r. Nam ex da-

ta ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.

Corol. 4. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex aucta Velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, adeoq; velocitati semper proportionalem esse, neq; ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoq; velocitas.

Corol. 5. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænominis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, cDp (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum assumpta quacunq; longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta DP, inveniantur longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam SM-



$SMMM$ in X, & erit SX vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP ut modo inventa longitudo DF ad longitudinem eandem per experimentum cognitam, erit vera longitudo DP. Qua inventa, habetur tum Curva Linea $DraF$ quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterum corpora reſiſti in ratione velocitatis Hypotheſis eſt magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo prædita tardiſſime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant (uti poſthac demonſtrabitur) corpora reſiſtuntur in duplicata ratione velocitatum. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis, adeoq; tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; eſtq; reſiſtentia (per motus Legem 2. & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Reſiſtentiæ.

SECT.

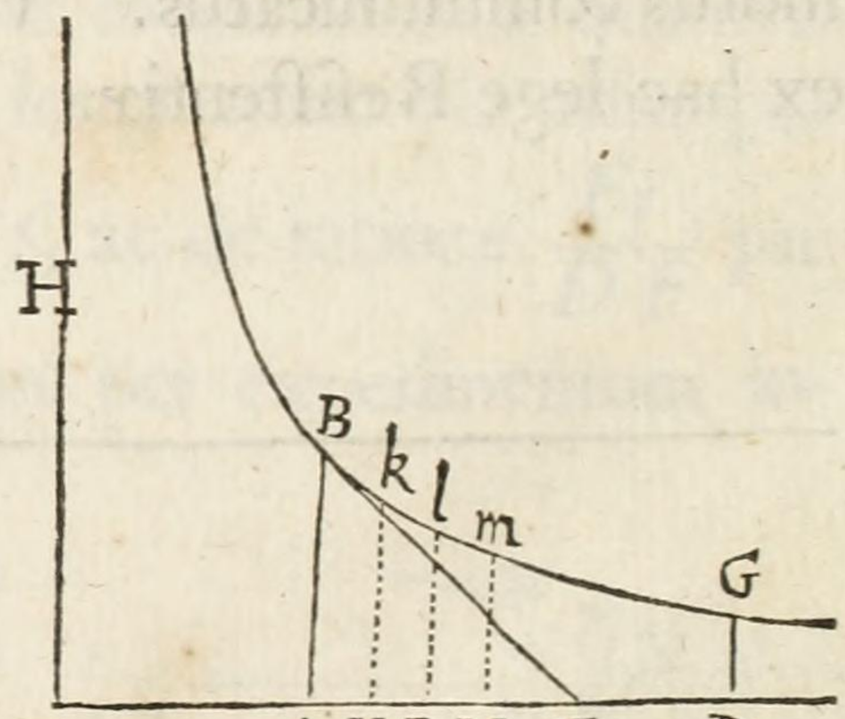
SECT. II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita per Medium similare movetur, tempora vero sumantur in progressione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione Geometrica inverse, & quod spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionales. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in recta CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. Hyperbolæ $Bklm G$, centro C Asymptotis rectangulis CD, CH, descriptæ occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, adeoq; ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et simili argumento erunt



runt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut $Kkq.$, $Llq.$ &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata ſunt ut earundem differentiæ, & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$, velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Kl, Lm, &c. & compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione Geometrica, & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eadem inverſa, atq; ſpatia deſcripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod ſi tempus exponatur per Aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon ſpatium quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate prima AB, in Medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum. $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in Medio reſiſtente deſcriptum, capi ndo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in Medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia Medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ, in cadente corpore, tempore AC, in Medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat Hyperbolam

in

in *B*, & occurrat Aſymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipſi *AC*, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *AB*.

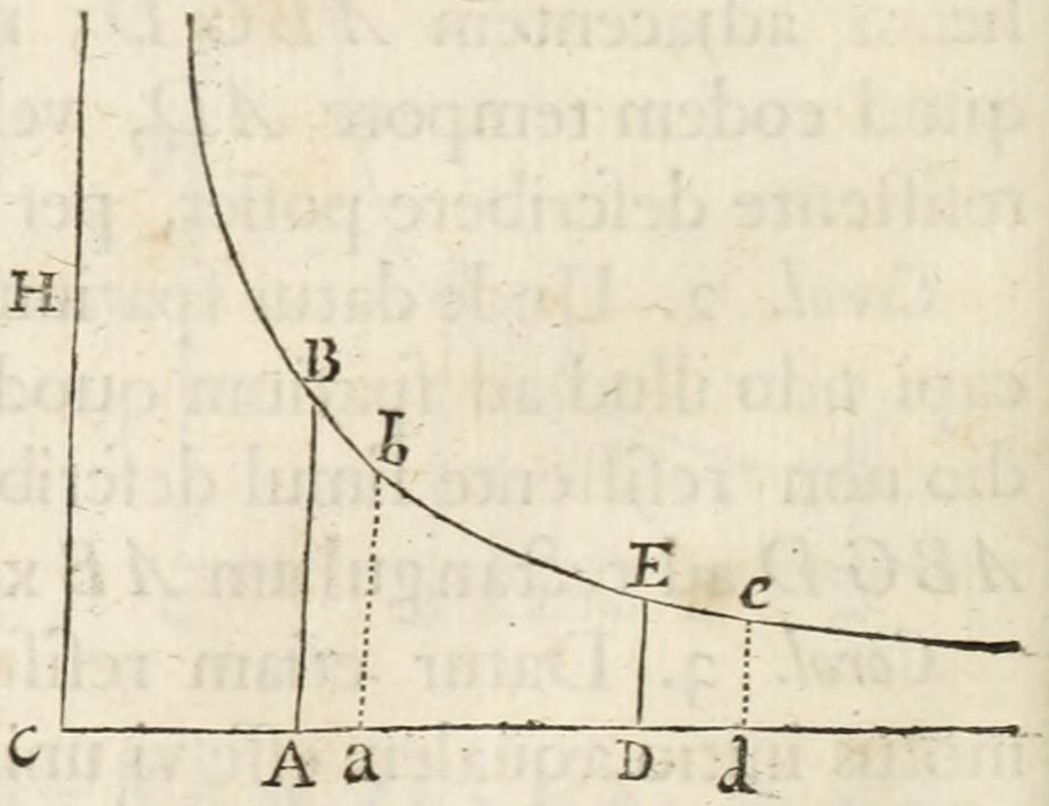
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus *AC*, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis *AB*; & inde datur punctum *B* per quod Hyperbola Aſymptotis *CH*, *CD* deſcribi debet; ut & ſpatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

Prop. VI. Theor. IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcripta Hyperbola quavis *BbEe* ſecante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Eſt ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypotheſin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*,



hoc eſt ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *AB*,

AB, *DE* ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam ſuis amiſſis *AB*—*ab*, *DE*—*de* proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphærica quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directe & reſiſtentiæ primæ inverſe, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & corpus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocia corpora reſiſtuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuſcunq ; cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſq; erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt ut velocitas & cubus diametri ; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoq; ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocia corpora reſiſtuntur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunq; cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametro-

rum, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione reſiſtentiæ diminutæ, & ſpatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocia corpora reſiſtuntur in ratione dignitatis cujuſcunq; diametrorum, ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunq; cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ ſint ut D^n & E^n, ſpatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim ſub pari velocitate major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc Propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi Globi moveantur in Mediis diverſis, ſpatium in Medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc Propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ, & ſpatium in ratione temporis.

Lemma. II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Terminorum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuſcunq; in Arithmetica per multiplicationem, diviſionem & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium abſq; additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates

tes ſunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica & ſimiles. Has quantitates ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes hic conſidero, & eorum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ ſunt magnitudinis, deſinunt eſſe momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neq; enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Termini autem cujuſq; Generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc Terminum.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut ſi quantitatum quarumcunq; perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. Momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: & dignitatum $A^2, A^3, A^4, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{3}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{2}{3}}, \frac{1}{A}, \frac{1}{A^2}$, & $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ momenta $2Aa, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{2}aA^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}, -aA^{-2}, -2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter ut dignitatis cujuſcunq; $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A quad. x B momentum fuerit $2aAB + A^2b$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4Cc$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB+Ab$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+Ab$. Q. E. D.

Cas. 2. Ponatur AB æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC+Gc$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB+Ab$) $aBC+AbC+ABc$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunq;. Q. E. D.

Cas. 3. Ponantur A, B, C æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+Ab$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+AbC+ABc$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunq; A^n eſt naA^{n-1}. Q. E. D.

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipſius 1, id eſt nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu A^{-1} eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A_n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3 : ideoq; momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive

$2aA$

$2aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æqualem B, erit A^{m} æquale B^{n}, ideoq; maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} ſeu $\frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}$, adeoq; $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuſcunq; $A^{m}B^{n}$ momentum eſt momentum ipſius A^{m} ductum in B^{n}, una cum momento ipſius B^{n} ducto in A^{m}, id eſt $maA^{m-1}+nbB^{n-1}$; idq; ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A, -B, D, 2E, 3F$.

Corol. 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunq; dati.

Corol. 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritiſſimo *G. G Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi

Tan-

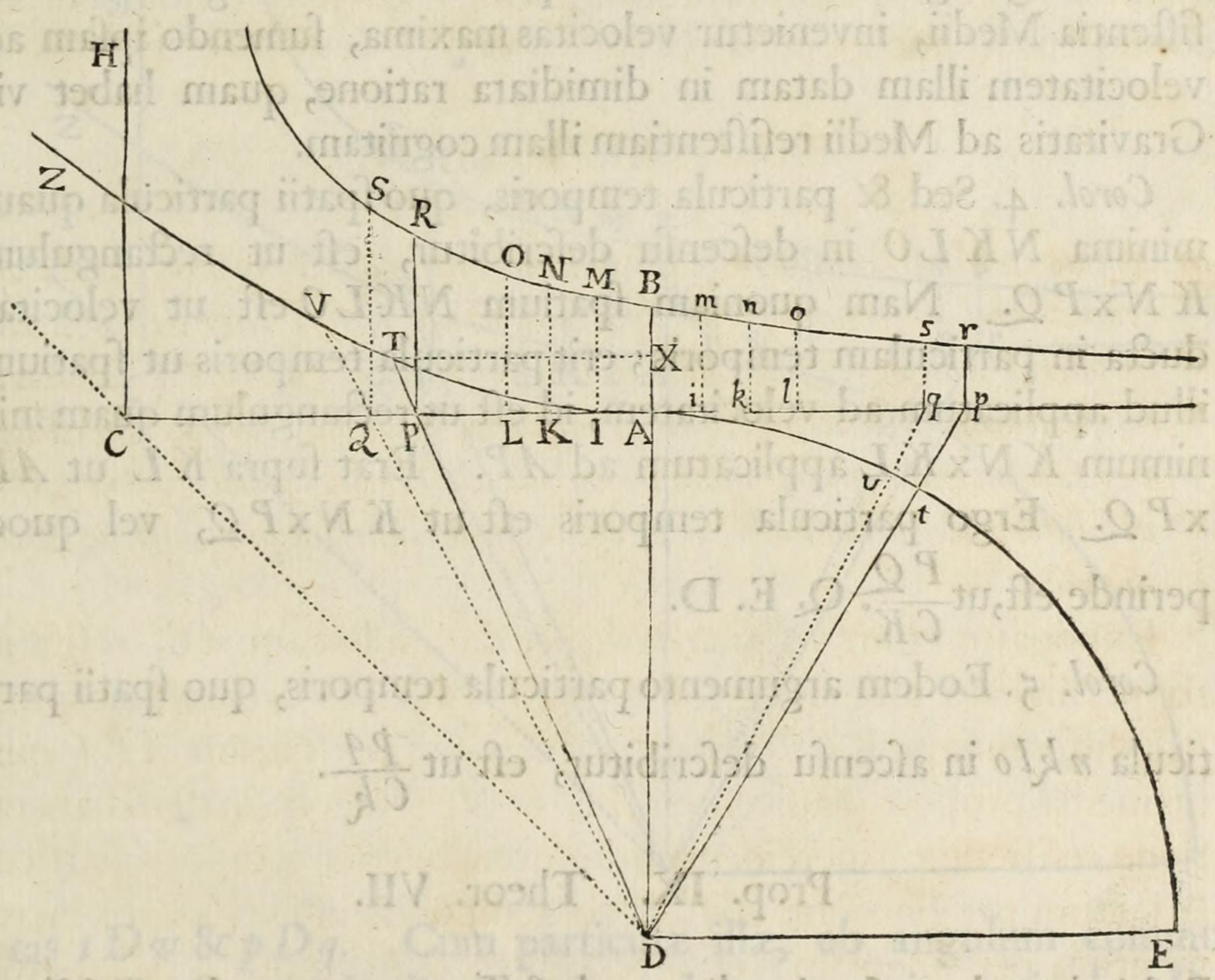
Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æque ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus [Data æquatione quotcunq; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice verſa] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoq; in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriuſq; fundamentum continetur in hoc Lemmate.

Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptnm diſtinguatur in partes æquales, inq; principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) colligantur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; reſiſtentia per lineam indefinitam AK; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ ſit media proportionalis inter AK & AC, ideoq; in dimidiata ratione reſiſtentiæ) incrementum reſiſtentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Aſymptotis rectangulis CA, CH deſcribatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK eſt ut $AP\,q.$, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2AP\,Q$, id eſt ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, per motus Leg. 2. proportionale eſt vi generanti KC. Componatur ratio ipſius KL cum ratione ipſius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ

KNOL ad rectangulum *KL*x*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota Hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*,



KNOL, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione Geometrica. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoq; si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. Q. E. D.

Corol.

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream Hyperbolicam $ABNK$; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia Medii per lineas AC, AP & AK reſpective; & vice verſa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea AC.

Corol. 3. Igitur ſi in data aliqua velocitate cognoſcatur reſiſtentia Medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii reſiſtentiam illam cognitam.

Corol. 4. Sed & particula temporis, quo ſpatii particula quam minima $NKLO$ in deſcenſu deſcribitur, eſt ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam ſpatium $NKLO$ eſt ut velocitas ducta in particulam temporis; erit particula temporis ut ſpatium illud applicatum ad velocitatem, id eſt ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad AP. Erat ſupra KL ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis eſt ut $KN \times PQ$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{PQ}{CK}$. Q. E. D.

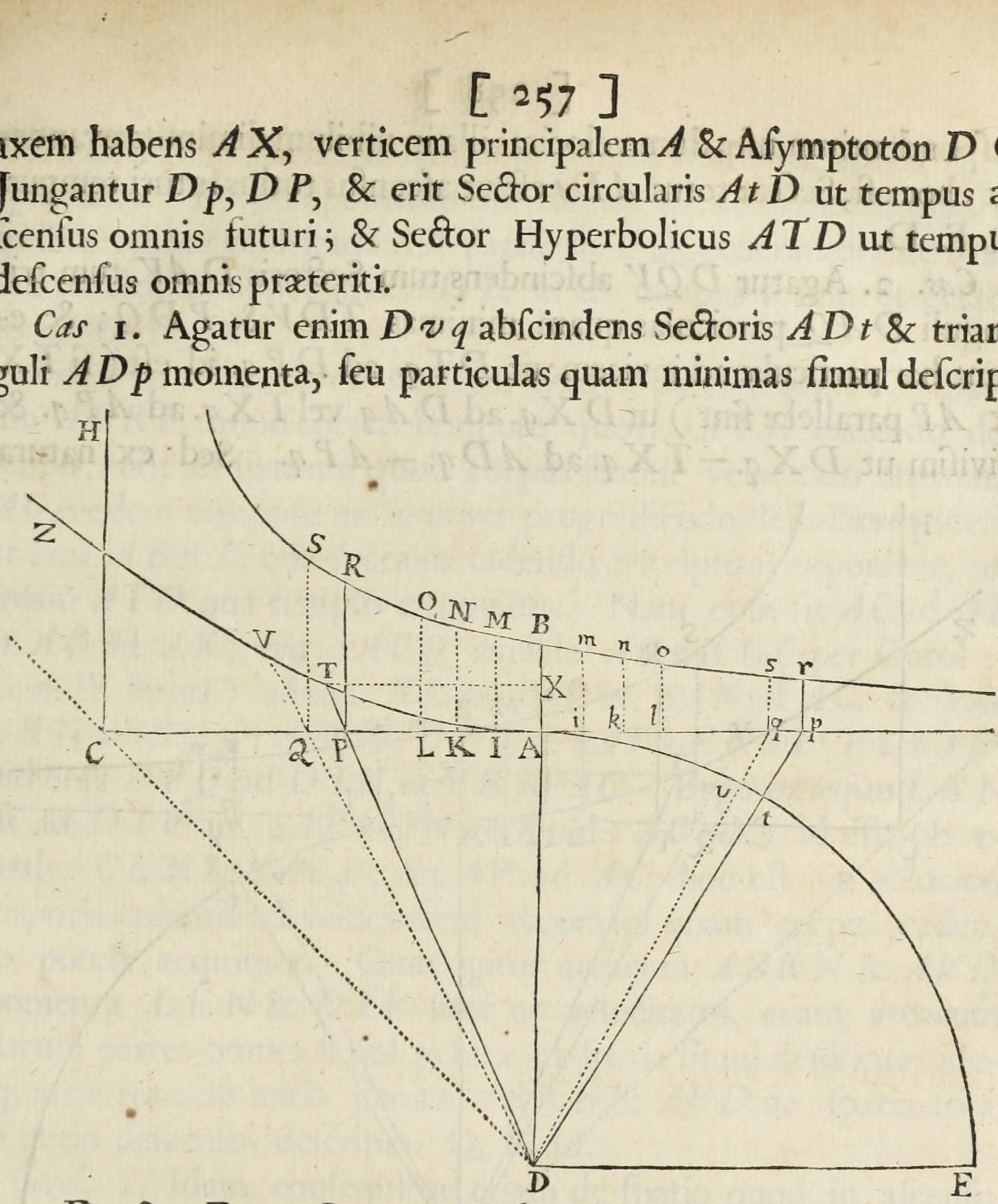
Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo ſpatii particula $nklo$ in aſcenſu deſcribitur, eſt ut $\frac{pq}{Ck}$.

Prop. IX. Theor. VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi Tangentes angulorum ſectoris Circularis & ſectoris Hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcenſus futuri ut ſector Circuli, & tempus omne deſcenſus præteriti ut ſector Hyperbolæ.

Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D ſemidiametro AD deſcribatur tum circuli Quadrans AtE, tum Hyperbola rectangula AVZ axem

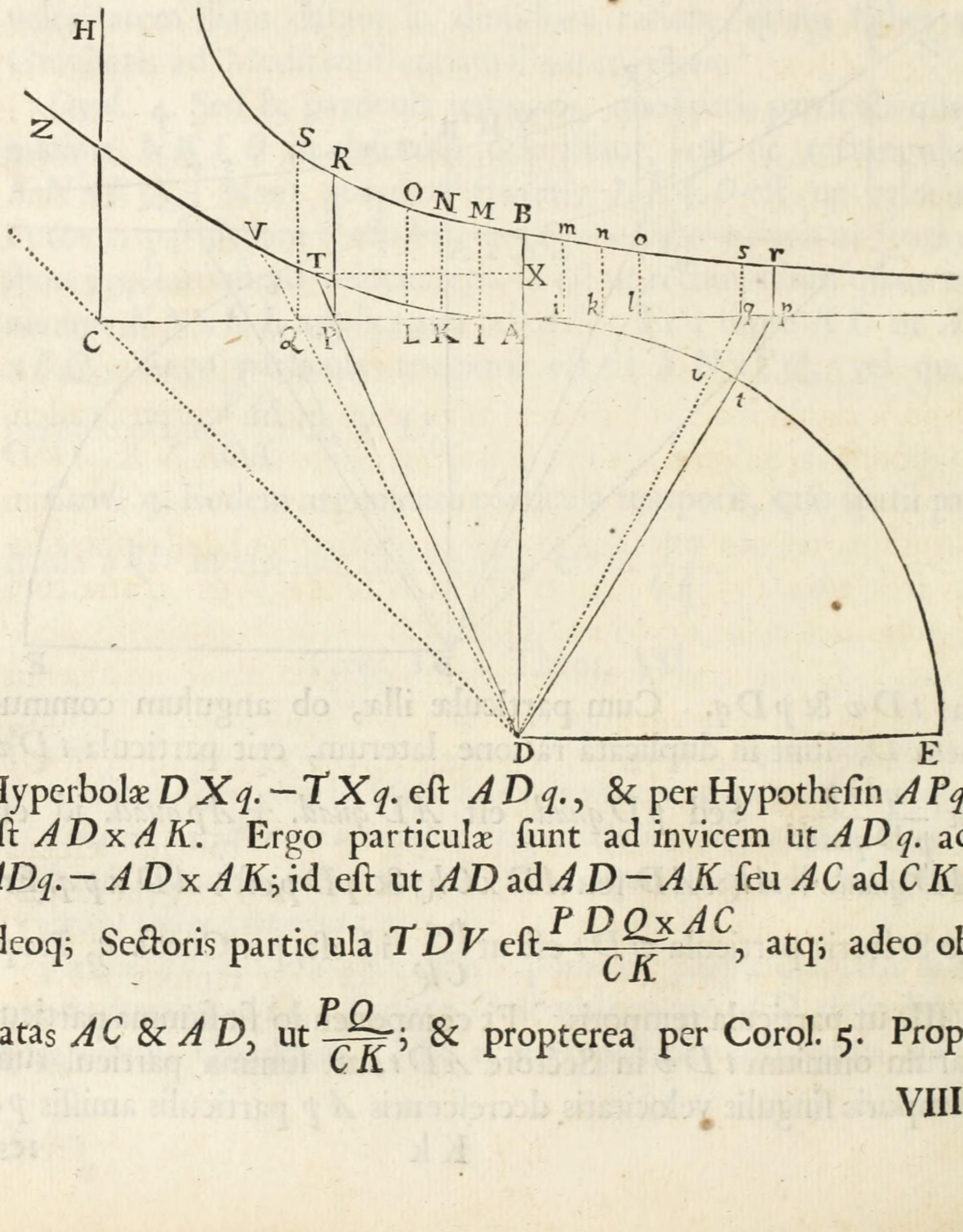
axem habens AX, verticem principalem A & Aſymptoton DC. Jungantur Dp, DP, & erit Sector circularis AtD ut tempus aſcenſus omnis futuri; & Sector Hyperbolicus ATD ut tempus deſcenſus omnis præteriti.



Cas 1. Agatur enim Dvq abſcindens Sectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas tDv & pDq. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp}{pD\,quad.}$. Sed $pD\,quad.$ eſt $AD\,quad. + Ap\,quad.$ id eſt $AD\,quad. + Ak \times AD$ ſeu $AD \times Ck$; & qDp eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo Sectoris particula vDt eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, per Corol. 5, Prop. VIII. ut particula temporis. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in Sectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq res-

reſpondentium, uſq; dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, Sector totus ADt eſt ut aſcenſus totius futuri tempus. Q. E. D.

Cas. 2. Agatur DQV abſcindens tum Sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut $DTq.$ ad $DPq.$ id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut $DXq.$ ad $DAq.$ vel $TXq.$ ad $APq.$ & diviſim ut $DXq. - TXq.$ ad $ADq. - APq.$ Sed ex natura



Hyperbolæ $DXq. - TXq.$ eſt $ADq.$, & per Hypotheſin $APq.$ eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut $ADq.$ ad $ADq. - AD \times AK$; id eſt ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoq; Sectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atq; adeo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$; & propterea per Corol. 5. Prop.

VIII.

VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis *P Q* reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *P Q* generantur, ut ſumma particularum Sectoris *ADT*, id eſt tempus totum ut Sector totus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi *AB* æquetur quartæ parti ipſius *AC*, ſpatium *ABRP*, quod corpus tempore quovis *ATD* cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus ſemiſſe velocitatis maximæ *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area *ABRP*, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream *ATD* qua tempus exponitur. Nam cum ſit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit $2APQ$ æquale $AC \times KL$ (per Corol 1. Lem. II. hujus) adeoq; *KL* ad *PQ* ut $2AP$ ad *AC*, & inde LKN ad $PQ \times \frac{1}{2} AD$ ſeu DPQ ut $2AP \times KN$ ad $\frac{1}{2} AC \times AD$. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo ex æquo *LKN* eſt ad *DTV* ut $2AP \times KN \times CK$ ad $\frac{1}{2} AC\,cub.$; id eſt, ob æquales CKN & $\frac{1}{4} AC\,q.$, ut *AP* ad *AC*; hoc eſt ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum *ABKN* & *AVD* momenta *LKN* & *DTV* ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoq; areæ totæ ab initio genitæ *ABKN* & *AVD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad Sectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad Sectorem Hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in Medio non reſiſtente foret ut tempus *ATD*, & in Medio reſiſtente eſt ut *AP*, id eſt ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad Sectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Eſt igitur tempus quo corpus in Medio reſiſtente cadendo velocitatem A*P* acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam A*C* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut Sector A*DT* ad triangulum A*DC*: & tempus, quo velocitatem A*p* in Medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus *At* ad ejus Tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II. indeq; datur & ſpatium quod ſemiſſe velocitatis illius dato tempore deſcribi poteſt, & tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo Sectorem A*DT* vel A*Dt* ad triangulum A*DC* in ratione temporum; dabitur tum velocitas A*P* vel A*p*, tum area A*BKN* vel A*Bkn*, quæ eſt ad Sectorem ut ſpatium quæſitum ad ſpatium jam ante inventum.

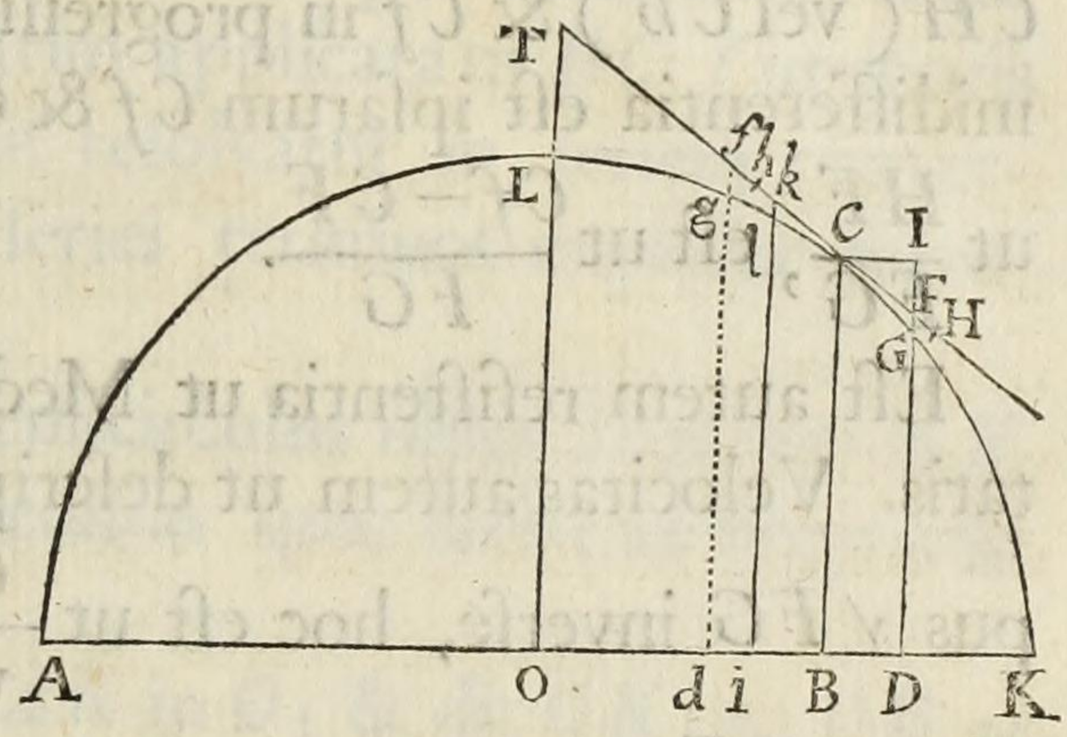
Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio A*Bnk* vel A*BNK*, dabitur tempus A*Dt* vel A*DT*.

Prop. X. Prob. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, ſitq; reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis.

Sit A*K* planum illud plano Schematis perpendiculare; A*CK* linea curva; *C* corpus in ipſa motum; & *FCf* recta ipſam tangens

gens in *C*. Fingatur autem corpus *C* nunc progredi ab A ad *K* per lineam illam A *C K*, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progreſſu impediri a Medio, in regreſſu æque promoveri, ſic ut in iiſdem locis eadem ſemper ſit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus deſcribat corpus progrediens arcum quam minimum *C G*, & corpus regrediens arcum *C g*; & ſint *C H*, *C h* longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco *C* exeuntia, his temporibus, abſq; Medii & Gravitatis actionibus deſcriberent: & a punctis *C*, *G*, *g* ad planum horizontale A *K* demittantur perpendicula *C B*, *G D*, *g d*, quorum *G D* ac *g d* tangenti occurrant in *F* & *f*. Per Medii reſiſtentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis *C H*, deſcribat ſolummodo longitudinem *C F*; & per vim gravitatis tranſfertur corpus de *F* in *G*: adeoq; lineola *H F* vi reſiſtentiæ, & lineola *F G* vi gravitatis ſimul generantur. Proinde (per Lem. X. Lib. I.) lineola *F G* eſt ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeoq; (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola *H F* ut reſiſtentia & quadratum temporis, hoc eſt ut reſiſtentia & lineola *F G*. Et inde reſiſtentia fit ut *H F* directe & *F G* inverſe, ſive ut $\frac{HF}{FG}$. Hæc ita ſe habent in lineolis naſcentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non ſunt accuratæ.



Et ſimili argumento eſt *f g* ut quadratum temporis, adeoq; ob æqualia tempora æquatur ipſi *F G*; & impulſus quo corpus regrediens urgetur eſt ut $\frac{bf}{fg}$. Sed impulſus corporis regredientis

&

& reſiſtentia progredientis ipſo motus initio æquantur, adeoq; & ipſis proportionales $\frac{bf}{fg}$ & $\frac{HF}{FG}$ æquantur; & propterea ob æquales fg & FG, æquantur etiam bf & HF, ſuntq; adeo CF, CH (vel Cb) & Cf in progreſſione Arithmetica, & inde HF ſemidifferentia eſt ipſarum Cf & CF; & reſiſtentia quæ ſupra fuit ut $\frac{HF}{FG}$, eſt ut $\frac{Cf-CF}{FG}$.

Eſt autem reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut deſcripta longitudo CF directe & tempus $\surd FG$ inverſe, hoc eſt ut $\frac{CF}{\surd FG}$, adeoq; quadratum velocitatis ut $\frac{CFq.}{FG}$. Quare reſiſtentia, ipſiq; proportionalis $\frac{Cf-CF}{FG}$ eſt ut Medii denſitas & $\frac{CFq.}{FG}$ conjunctim; & inde Medii denſitas ut $\frac{Cf-CF}{FG}$ directe & $\frac{CFq.}{FG}$ inverſe, id eſt ut $\frac{Cf-CF}{CFq.}$.

Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod ſi in Cf capiatur Ck æqualis CF, & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum ki, ſecans curvam ACK in l; fiet Medii denſitas ut $\frac{FG-kl}{CF \times \overline{FG+kl}}$

Erit enim fC ad kC ut $\surd fg$ ſeu $\surd FG$ ad $\surd kl$, & diviſim fk ad kC, id eſt $Cf-CF$ ad CF ut $\surd FG-\surd kl$ ad $\surd kl$; hoc eſt (ſi ducatur terminus uterq; in $\surd FG+\surd kl$) ut $FG-kl$ ad $kl+\surd FG \times kl$, ſive ad $FG+kl$. Nam ratio prima naſcentium $kl+\surd FG \times kl$ & $FG+kl$ eſt æqualitatis. Scribatur itaq; $\frac{FG-kl}{FG+kl}$ pro $\frac{Cf-CF}{CF}$; & Medii denſitas, quæ fuit ut $\frac{Cf-CF}{CF\,quad.}$ evadet ut $\frac{FG-kl}{CF \times FG+kl}$.

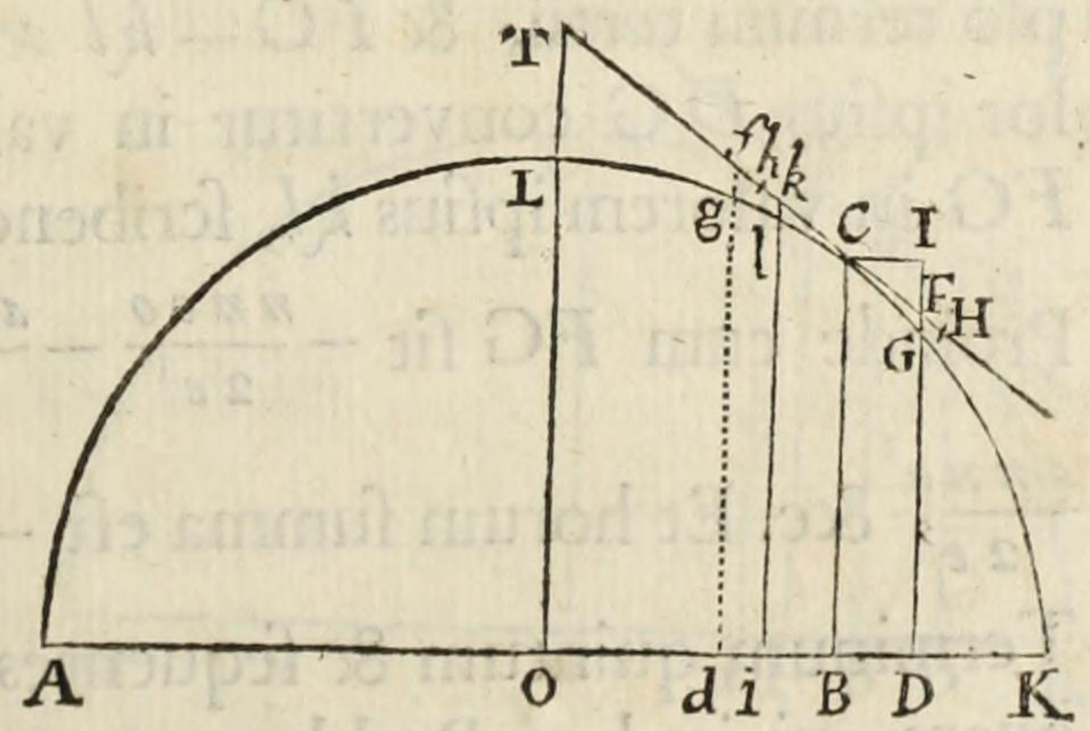
Corol.

Corol. 2. Unde cum $2HF$ & $Cf-CF$ æquentur, & FG & kl (ob rationem æqualitatis) componant $2FG$; erit $2HF$ ad CF ut $FG-kl$ ad $2FG$; & inde HF ad FG, hoc eſt reſiſtentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in $FG-kl$ ad $4FG$ *quad.*

Corol. 3. Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AB & ordinatim applicata m BC; (ut moris eſt) & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur: ut in Exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea ACK ſemicirculus ſuper diametro AK deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur ſemicirculi diameter AK in O; & dic OK n, OB a, BC e, & BD vel Bi o: & erit $DGq.$ ſeu $OGq.-ODq.$ æquale $nn-aa-2ao-oo$ ſeu $ee-2ao-oo$; & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DG = e-\frac{ao}{e}-\frac{oo}{2e}-\frac{aaoo}{2e^3}-\frac{ao^3}{2e^3}-\frac{a^3o^3}{2e^5}$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee+aa$ & evadet $DG = e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annno^3}{2e^5}-$ &c.



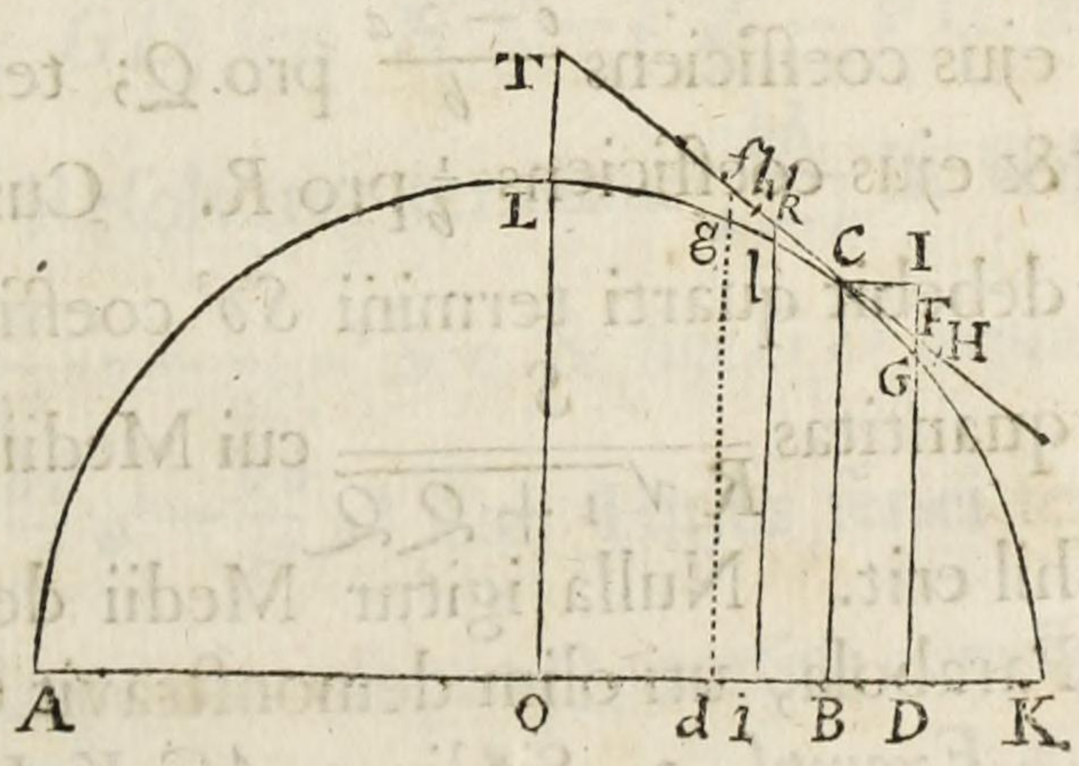
Hujuſmodi Series diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum in quo quantitas illa extat unius dimenſionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ BC inſiſtentis ad indefinitæ quantitatis initium B; ſecundus terminus

nus qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter BC & DF, id eſt lineolam IF, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum BC-ID, atq; adeo poſitionem Tangentis CF ſemper determinat: ut in hoc caſu capiendo IF ad IC ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam FG, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus FCG, ſeu curvaturam quam curva linea habet in C. Si lineola illa FG finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſubſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoq; negligi poſſunt. Terminus quartus, qui hic eſt $\frac{annoo}{2e^5}$, exhibet variationem Curvaturæ; quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Serierum in ſolutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea CF eſt latus quadratum ex $CIq.$ & $IFq.$ hoc eſt ex $BDq.$ & quadrato termini ſecundi. Eſtq; $FG+kl$ æqualis duplo termini tertii, & $FG-kl$ æqualis duplo quarti. Nam valor ipſius DG convertitur in valorem ipſius il, & valor ipſius FG in valorem ipſius kl, ſcribendo Bi pro BD, ſeu $-o$ pro $+o$. Proinde cum FG ſit $-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annoo}{2e^5}$ &c. erit $kl=-\frac{nnoo}{2e^3}+\frac{annoo}{2e^5}$ &c. Et horum ſumma eſt $-\frac{nnoo}{e^3}$, differentia $-\frac{annoo}{e^5}$. Terminum quintum & ſequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate conſiderandi veniant. Itaq; ſi deſignetur Series univerſaliter his terminis $\mp Qo-Roo-So^3$ &c. erit CF æqualis $\sqrt{oo+QQoo}$, $FG+kl$ æqualis $2Roo$, & $FG-kl$ æqualis $2So^3$. Pro CF, $FG+kl$ & $FG-kl$ ſcribantur hi

hi earum valores, & Medii denſitas quæ erat ut $\frac{FG-kl}{CF \text{in} FG+kl}$ jam fiet ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Deducendo igitur Problema unumquodq; ad ſeriem convergentem, & hic pro Q, R & S ſcribendo terminos ſeriei ipſis reſpondentes; deinde etiam ponendo reſiſtentiam Medii in loco quovis G eſſe ad Gravitatem ut $S\sqrt{1+QQ}$ ad $2RR$, & velocitatem eſſe illam ipſam quacum corpus, de loco C ſecundum rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps moveri poſſet, ſolvetur Problema.

Sic in Problemate jam ſolvendo, ſi ſcribantur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$ pro $\sqrt{1+QQ}$, $\frac{nn}{2e^3}$ pro R, & $\frac{annn}{2e^5}$ pro S, prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{nne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$ ſeu $\frac{OB}{BC}$, id eſt ut Tangentis longitudo illa CT, quæ ad ſemidiametrum OL ipſi AK normaliter inſiſtentem terminatur; & reſiſtentia erit ad gravitatem ut a ad n, id eſt ut OB ad circuli ſemidiametrum OK, velocitas autem erit ut $\sqrt{2BC}$. Igitur ſi corpus C certa cum velocitate, ſecundum lineam ipſi OK parallelam, exeat de loco L, & Medii denſitas in ſingulis locis C ſit ut longitudo tangentis CT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo C ſit ad vim gravitatis ut OB ad OK; corpus illud deſcribet circuli quadrantem LCK. Q.E.I.



At ſi corpus idem de loco A ſecundum lineam ipſi AK per-

 pen-

pendicularem egrederetur, ſumenda eſſet $0B$ ſeu a ad contrarias partes centri 0, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem (hoc eſt quæ motus corporum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non poteſt ut corpus aſcendendo ab A deſcribat circuli quadrantem AL. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $ALCK$ Parabola, axem habens $0L$ horizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut projectile in ipſa moveatur.

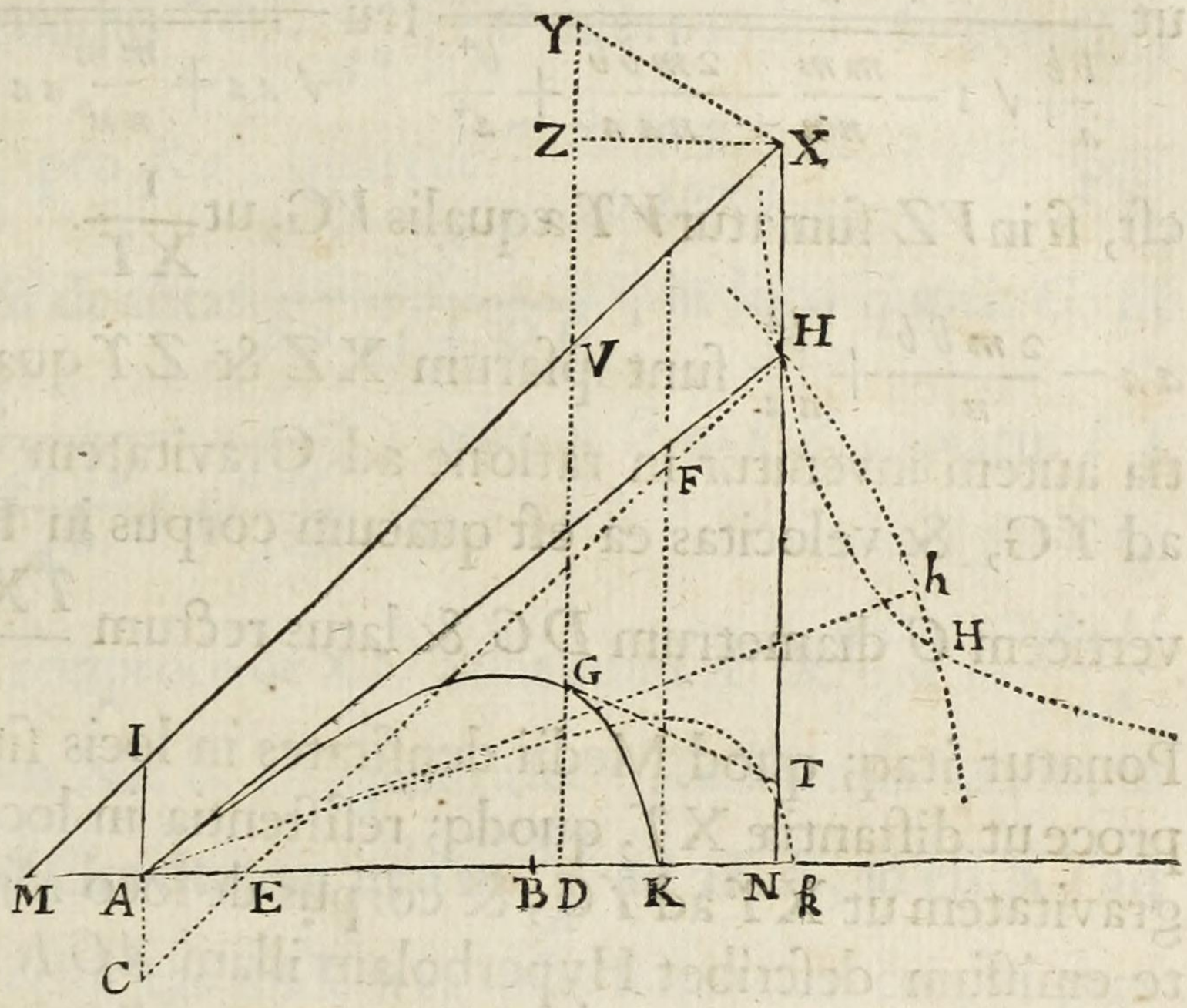
Ex natura Parabolæ, rectangulum ADK æquale eſt rectangulo ſub ordinata DG & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b, AB a, AK c, BC e & BD o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale eſt rectangulo b in DG, adeoq; DG æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, & ejus coefficiens $\frac{c-2a}{b}$ pro Q; tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo, & ejus coefficiens $\frac{1}{b}$ pro R. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti termini So^3 coefficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit *Galilæus*. Q. E. I.

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG pro-

ductæ

ductæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur BN a, BD o, NX c, & ratio data VZ ad ZX



vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumq; coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt,

in Regula ſuperiore, pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1-\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id eſt, ſi in VZ ſumatur $V\Upsilon$ æqualis VG, ut $\frac{1}{X\Upsilon}$. Namq; aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & $Z\Upsilon$ quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad Gravitatem quam habet $X\Upsilon$ ad ΥG, & velocitas ea eſt quacum corpus in Parabola pergeret verticem G diametrum DG & latus rectum $\frac{\Upsilon X\ quad.}{VG}$ habente.

Ponatur itaq; quod Medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciproce ut diſtantiæ $X\Upsilon$, quodq; reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $X\Upsilon$ ad ΥG; & corpus de loco A juſta cum velocitate emiſſum deſcribet Hyperbolam illam AGK. Q.E.I.

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola ſit, centro X Aſymptotis MX, NX ea lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD ſecet Hyperbolam in G & Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua ND^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro DN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitq; VZ ad ZX vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{A-O^n}$, $VZ=\frac{d}{e}$ in $A-O$, & GD ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{A-O^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{A-O^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbbO}{A^{n+1}}+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+$

+

$+\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $\frac{S}{R \times \sqrt{1+QQ}^{n+2}}$, adeoq; ſi in VZ capiatur $V\Upsilon$ æqualis $n \times VG$, eſt reciproce ut $X\Upsilon$. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}$ in $A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & $Z\Upsilon$ quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem ut S in $\frac{X\Upsilon}{A}$ ad $2RR$, id eſt $X\Upsilon$ ad $\frac{3nn+3n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & Latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2X\Upsilon \text{ quad.}}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod linea, quam Projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utiq; linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non

eſt

eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta GT tangit Hyperbolam in G, ideoq; denſitas Medii in G eſt reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq.}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{3nn+3n}{n+2}$ GV.

Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Aſymptoto NX in H, actaq; AI occurrat alteri Aſymptoto MX in I: erit Medii denſitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq.}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad Gravitatem ut AH ad $\frac{3nn+3n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur Medii denſitas in A & mutetur angulus NAH, manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoq; ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus NAH tum Medii denſitas in A, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus NAH quam corporis velocitas in A, gravitaſq; acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eiq; proportionali longitudine $\frac{AHq.}{AI}$; & propterea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplica-

plicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia,ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

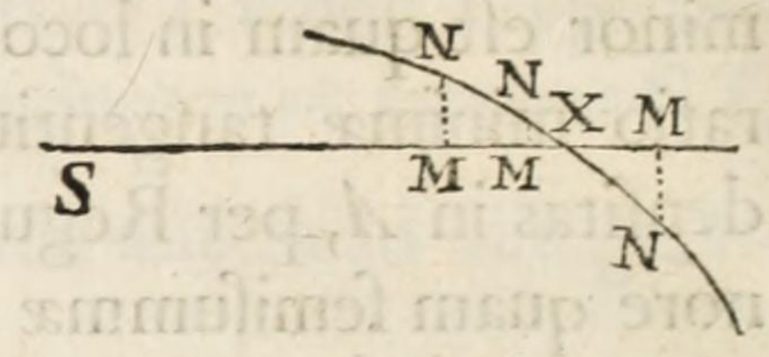
Reg. 4. Quoniam denſitas Medii prope verticem Hyperbolæ minor eſt quam in loco *A*, ut ſervetur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad Tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A*, per Regulam tertiam, diminui in ratione paulo minore quam ſemiſummæ Tangentium ad Tangentem *AH*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribenda ſit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* æqualis facto ſub $n+1$ & *AI*; centroq; *X* & Aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur Hyperbola, ea lege ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

Reg. 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis accuratæ ſunt hæ Hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad G; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, eſtq; cæteris ſimplicior. Igitur ſi Hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

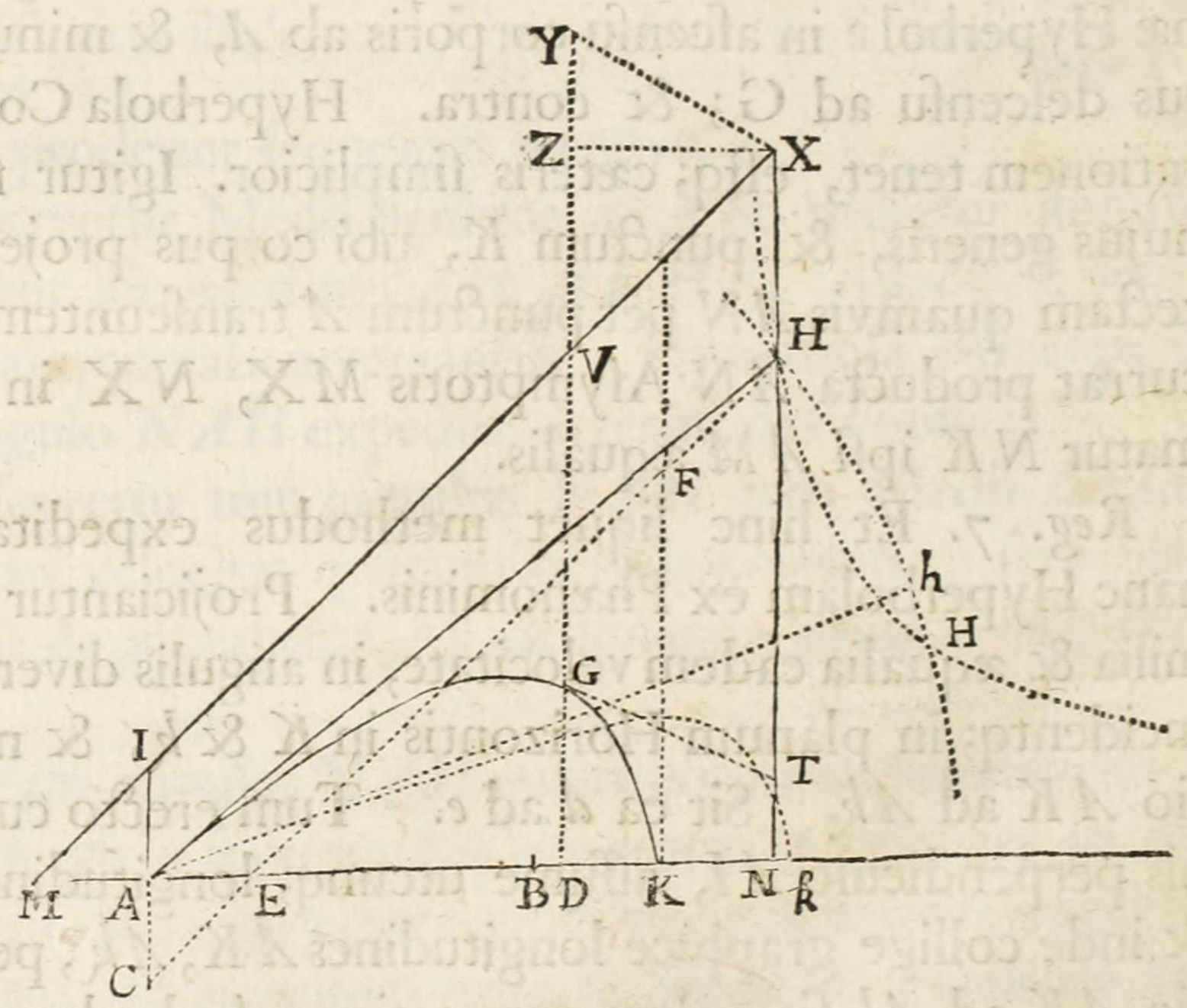
Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænominis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAK*, incidentq; in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunq; longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale

quale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N: & tum demum si per omnia agatur Curva linea regularis NNX-



N, hæc abscindet SX quæsitæ longitudini AH æqualem. Ad usus Mechanicos sufficit longitudines AH, AI easdem in angulis omnibus HAK retinere. Sin figura ad inveniendam resistentiam Medij accuratius determinanda sit, corrigendæ sunt semper hæ longitudines per Regulam quartam.

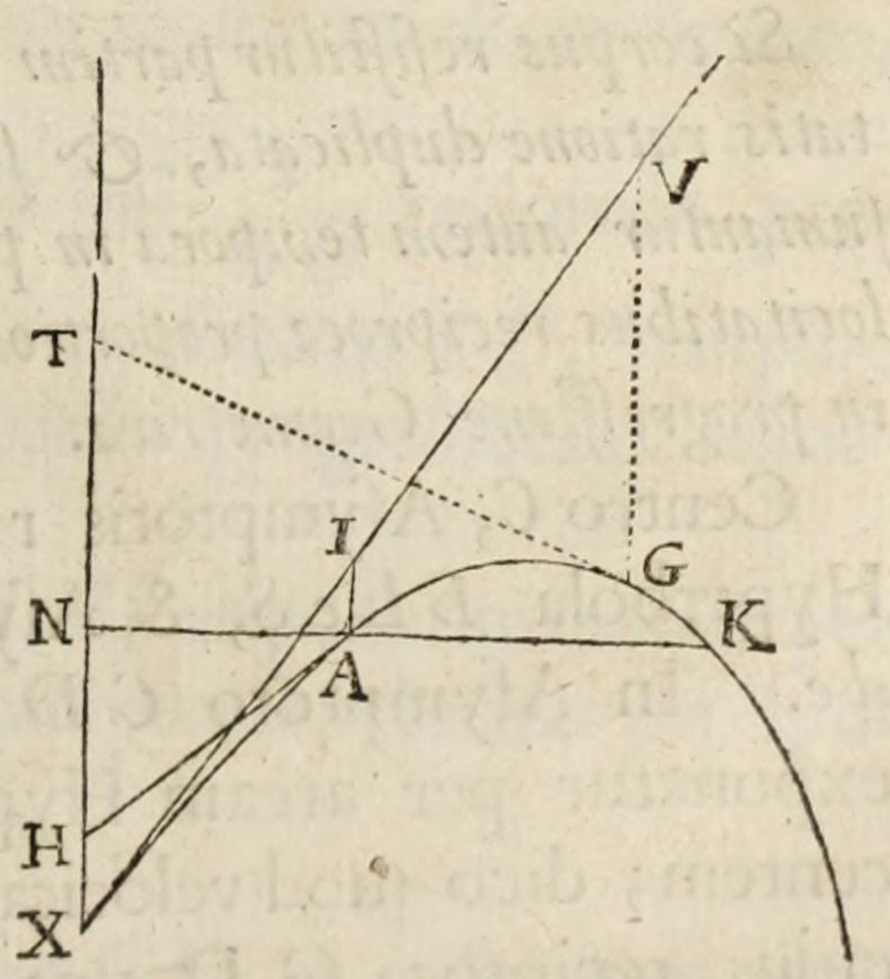
Reg. 8. Inventis longitudinibus AH, HX; si jam desideretur positio rectæ AH, secundum quam Projectile data illa cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorsum tandat, & æquetur ipsi AI seu $\frac{1}{2}HX$. Asymptotis AK, KF describatur Hy-



perbola, cujus Conjugata transeat per punctum C, centroq; A & intervallo AH describatur Circulus secans Hyperbolam illam in pun-

puncto *H*; & projectile secundum rectam *AH* emissum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur *CH* occurrens ipsis *AK* & *KF*, illi in *C*, huic in *F*, & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* est ad *AE* ut F H ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Asymptotis *AK*, *KF* descriptam, cujus conjugata transit per punctum *C*, atq adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & circuli descripti. *Q. E. D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, sive recta *AKN* horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodq; ex duabus intersectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*, quorum minor eligendus est; & quod in Praxi mechanica sufficit circulum semel describere, deinde regulam terminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis sit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *HK* sitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si *XAGK* Parabolam designet quam recta *XV* tangat in vertice X, sintq; ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abscissarum *XI*, XV dignitates *XI*^{n}, *XV*^{n}; agantur *XT*, *TG*, *HA*, quarum *XT* parallela sit *VG*, & *TG*, *HA* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, secundum rectam *AH* productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medij, in locis singulis *G*, sit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret,



in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica, verticem G, diametrum $V G$ deorſum productam, & latus rectum $\sqrt{\frac{2 T G q.}{n n - n} \text{ X } V G}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim Gravitatis ut $T G$ ad $\frac{3 n n - 3 n}{n - 2} V G$. Vnde ſi $N A K$ lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medij in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunq; angulus $N A H$; manebunt longitudines $A H$, $A I$, $H X$, & inde datur Parabolæ vertex X, & poſitio rectæ $X I$, & ſumendo $V G$ ad $I A$ ut $X V^n$ ad $X I^n$, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile tranſibit.

SECT. III.

De motu corporum quæ reſiſtuntur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

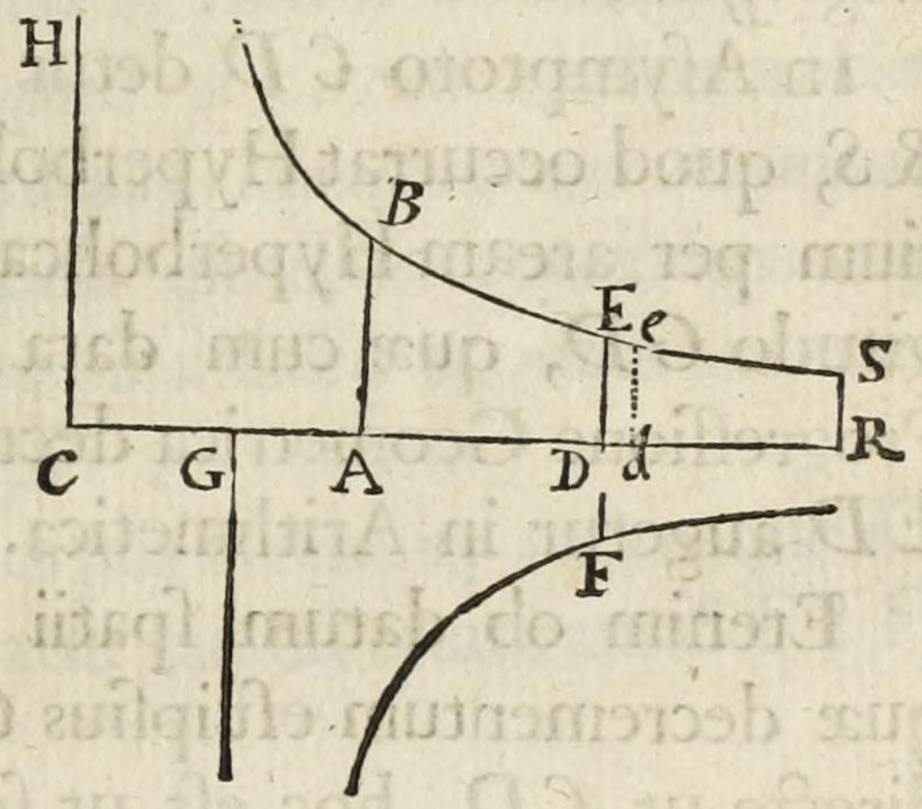
Prop. XI. Theor. VIII.

Si corpus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.

Centro C, Aſymptotis rectangulis $C A D d$ & $C H$ deſcribatur Hyperbola $B E e S$, & Aſymptoto $C H$ parallelæ ſint $A B$, $D E$, $d e$. In Aſymptoto $C D$ dentur puncta A, G: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam $A B E D$ uniformiter crefcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem $D F$, cujus reciproca $G D$ una cum data $C G$ componat longitudinem $C D$ in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit

Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE, adeoque directe ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq.}$, erit ut $\frac{CD}{GDq.}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq.}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq.}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq.}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq.}$ est ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis quantitate data CG augeatur, summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur si datis punctis A, G, exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD.}$

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujus-

vis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

Prop. XII. Theor. IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.

In Asymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in Progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium *RSED* augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum est ipsius *GD*, erit reciproce ut *ED*, adeoq; directe ut *CD*, hoc est ut summa ejusdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa dearum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ *GD*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim; & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum G, capiendo *GD* ad *GR* ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *ABED* descriptum. Invento autem puncto G, datur spatium ex data velocitate, & contra.

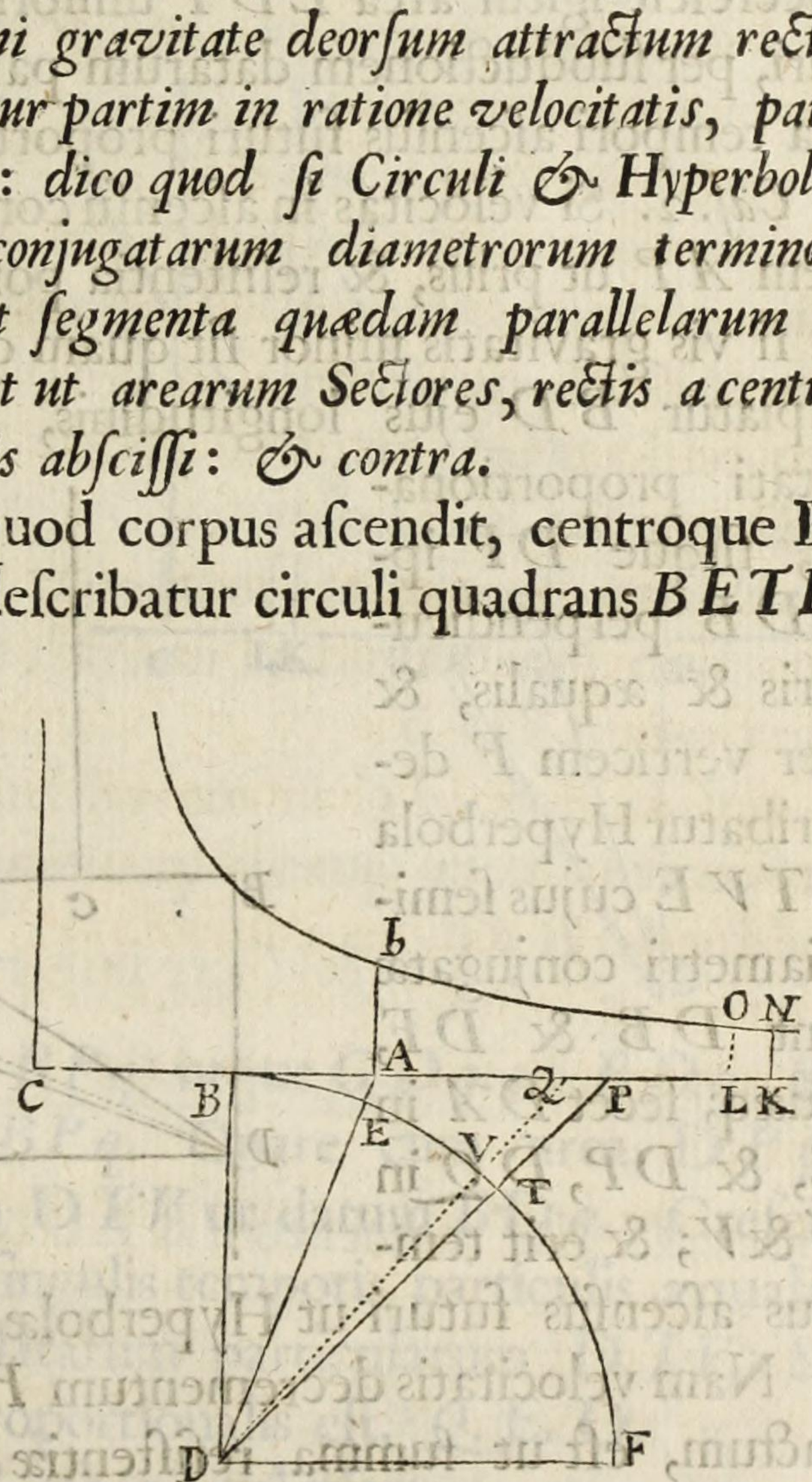
Corol. 3.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

Prop. XIII. Theor. X.

Poſito quod corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit, & reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod ſi Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

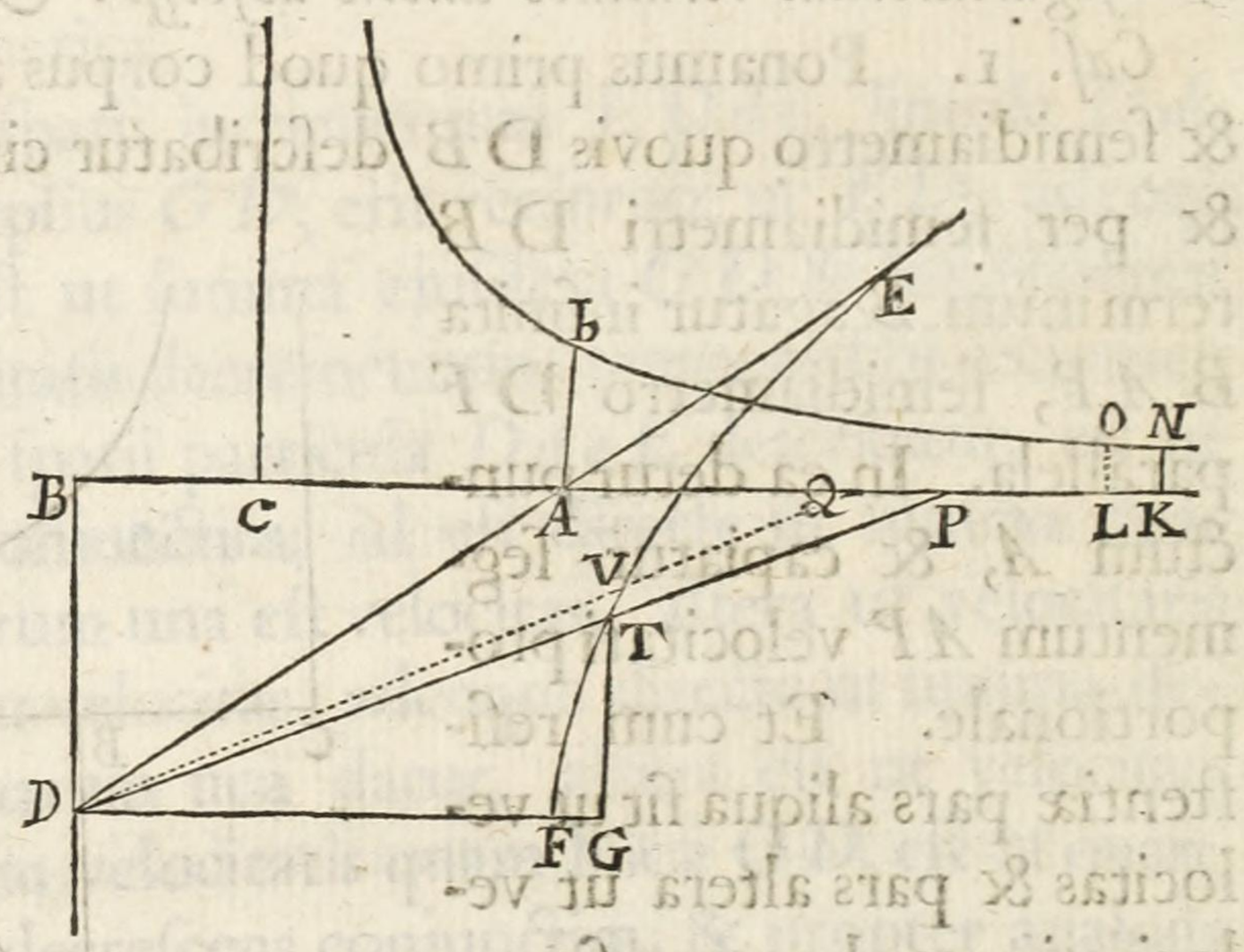
Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque D & ſemidiametro quovis D*B* deſcribatur circuli quadrans *BETF*, & per ſemidiametri D*B* terminum *B* agatur infinita *BAP*, ſemidiametro D*F* parallela. In ea detur punctum *A*, & capiatur ſegmentum *AP* velocitati proportionale. Et cum reſiſtentiæ pars aliqua ſit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, ſit reſiſtentia tota in *P* ut *AP quad.* + 2 *PAB*. Jungantur D*A*, D*P* circulum ſecantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per D*A* quadratum, ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in *P* ut D*Aq.* ad *APq.* + 2 *PAB*: & tempus aſcenſus omnis futuri erit ut circuli ſector *EDTE*.



Agatur enim *DVQ*, abſcindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & Sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento

to reſpondens: & velocitatis decrementum illud PQ erit ut ſumma virium gravitatis $DBq.$ & reſiſtentiæ $APq. + 2BAP$, id eſt (per *Prop.* 12. *Lib.* II. Elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad*; & area DTV, (quæ eſt ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$) eſt ut datum $DTq.$ Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus futuri proportionalis eſt. *Q. E. D.*

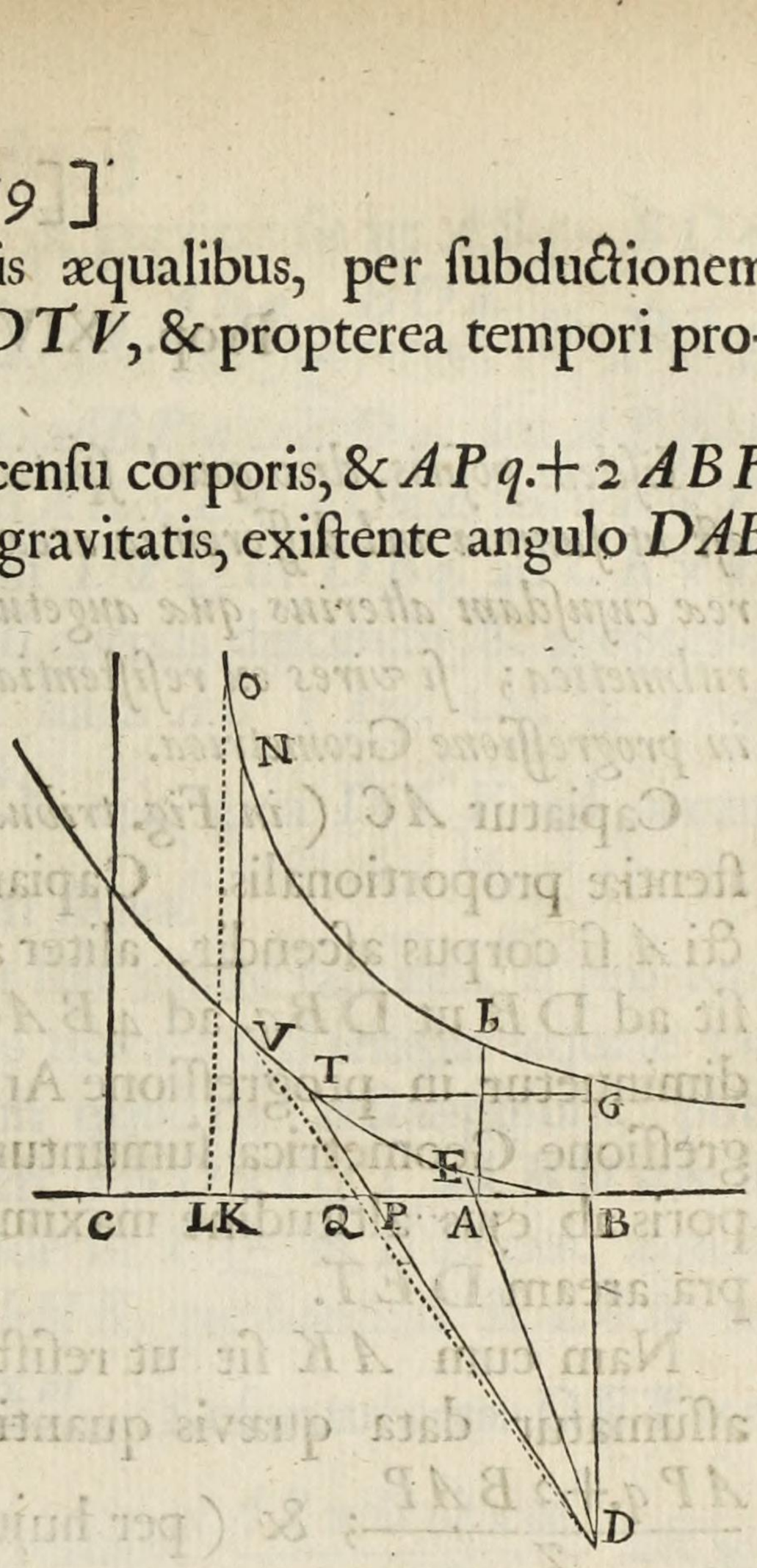
Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq. + 2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per $DAq.$ exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq. - BDq.$ gravitati proportionale, ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur Hyperbola $FTVE$ cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæq; ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſus futuri ut Hyperbolæ ſector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq. + 2ABP$ & gravitatis $ABq. - BDq.$ id eſt ut $BPq. - BDq.$ Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut $GTq.$ ſeu $GDq - DFq.$ ad $BDq.$ utque $GDq.$ ad $PBq.$ & diviſim ut $DFq.$ ad $BPq. - DBq.$ Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt ut $BPq. - BDq.$ erit area DTV ut datum $DFq.$ Decreſcit igitur area EDT uniformiter

miter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq. + 2ABP$ reſiſtentia, & $DBq. - ABq.$ vis gravitatis, exiſtente angulo DAB recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus deſcenſus.



Nam velocitatis incrementum PQ, eiq; proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt ut $DBq. - ABq. - 2ABP - APq.$ ſeu $DBq. - BPq.$ Et area DTV eſt ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoq; ut $GTq.$ ſeu $GDq. - BDq.$ ad $BPq.$ utque $GDq.$ ad $BDq.$ & diviſim ut $BDq.$ ad $BDq. - BPq.$ Quare cum area DPQ ſit ut $BDq. - BPq.$ erit area DTV ut datum $BDq.$ Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris centro D, radio DA, angulo ADT deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas in Medio non reſiſtente, tempori atque adeo Sectori huic proportionalis eſt; in Medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in Medio utroq; ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more Sectoris & Trianguli.

Prop. XIV.

Prop. XIV. Prob. IV.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut summa vel differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur AC (*in Fig. tribus ultimis,*) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus ascendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ sit ad DB ut $DBq.$ ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires CK in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est ut $APq. + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq.+2BAP}{Z}$; & (per hujus Lem. II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA \times PB}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq. + BDq.$ existente BET circulo, (*in Fig. Cas.* 1. *Prop.* XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq.+BDq.}{Z}$ & $DPq.$ seu $APq.+2BAP+ABq.+BDq.$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$: ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut $DTq.$ vel $DBq.$ ad $CK \times Z$.

Cas. 2.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq.$ linea AC (*Fig. Caſ.* 2. *Prop.* XIII.) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$ & $DTq.$ erit ad $DPq.$ ut $DFq.$ ſeu $DBq.$ ad $BPq - BDq.$ ſeu $APq. + 2BAP + ABq - BDq.$ id eſt ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z.$ Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut $DBq.$ ad $CK \times Z.$

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq. - ABq.$ & linea AC (*Fig. Caſ.* 3. *Prop. præced.*) æquetur $\frac{BDq. - ABq.}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut $DBq.$ ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut CK in Z ad $BDq.$ Atq; inde fit PQ in BD *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}.$ Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}.$ Eſt igitur differentia momentorum, id eſt momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id eſt ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia, & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad arcum ET, quam habet linea DA ad lineam DE; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tem-

pore deſcribere poſſet, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in Medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Tempus autem eſt ut DET ſeu $\frac{1}{2} BD \times ET$, & harum arearum momenta ſunt ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ ductum in momentum ipſius V & $\frac{1}{2} BD$ ductum in momentum ipſius ET, id eſt, ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ in $\frac{DAq. \times 2m}{DEq.}$ & $\frac{1}{2} BD \times 2m$, ſive ut $\frac{BD \times V \times DAq. \times m}{AB \times DEq.}$ & $BD \times m$. Et propterea momentum areæ V^2 eſt ad momentum differentiæ arearum DET & $AKNb$, ut $\frac{BD \times V \times DA \times m}{AB \times DE}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ ſive ut $\frac{V \times DA}{DE}$ ad AP; adeoque, ubi V & AP quam minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur eſt area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AKNb$. Unde cum ſpatia in Medio utroque, in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul deſcripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc ſunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia; ob eorum analoga incrementa neceſſe eſt ut in æqualibus quibuſcunque temporibus ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia. Q. E. D.

SECT. IV.

SECT. IV.

De Corporum circulari Motu in Mediis resistentibus.

LEM. III.

Sit PQRr *Spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod si puncta P & Q accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQxPS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

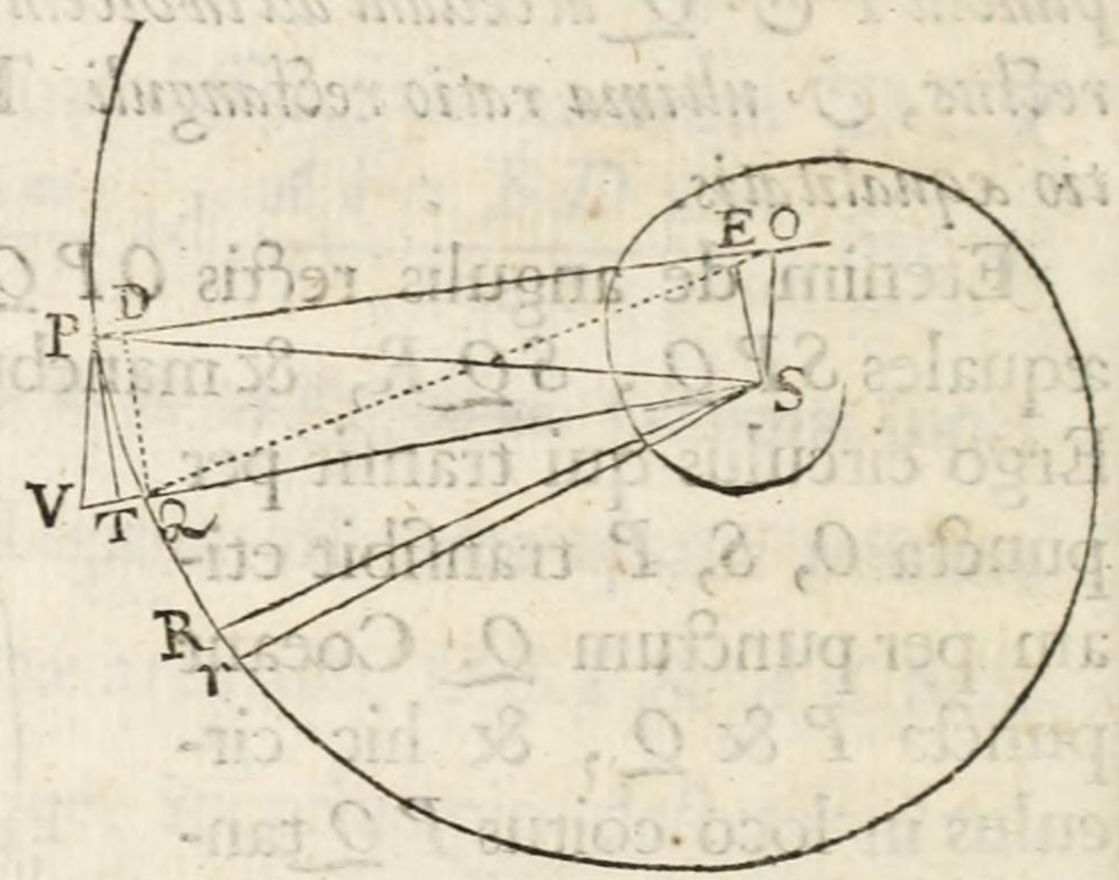
Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta *O*, *S*, *P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. Q. E. *D*.

Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu *PO* ad *PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad *PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad *PS*. Unde fit *PQ* q. æqualis *PQ* x *PS*. Q. E. *D*.

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Temporibus æqualibus deſcribat corpus arcus quam minimos PQ & QR, ſintque areæ PSQ, QSr æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P eſt reciproce ut $SPq.$ & (per Lem. X. Lib. I.) lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur, (Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit $TQ \times SPq.$ id eſt (per Lemma noviſſimum) $PQq. \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$, & corporis velocitas qua arcus PQ illo tempore deſcribitur ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt in dimidiata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento velocitas, qua arcus QR deſcribitur, eſt in dimidiata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt in dimidiata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ



$P\,Q$ ad arcum $Q\,r$ ut $S\,Q$ ad $S\,P$. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus $P\,Q$ ad arcum $R\,r$ ut $S\,Q$ ad $SP - SP^{\frac{1}{2}} \times SQ^{\frac{1}{2}}$, ſeu $\frac{1}{2}V\,Q$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - SP^{\frac{1}{2}} \times SQ^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2}V\,Q$ fit æqualitatis. In Medio non reſiſtente areæ æquales $P\,S\,Q$, $Q\,S\,r$ (per Theor. I. Lib. I.) temporibus æqualibus deſcribi deberent. Ex reſiſtentia oritur arearum differentia $R\,S\,r$, & propterea reſiſtentia eſt ut lineolæ $Q\,r$ decrementum $R\,r$ collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola $R\,r$ (per Lem. X. Lib. I.) eſt in duplicata ratione temporis. Eſt igitur reſiſtentia ut $\frac{R\,r}{P\,Q\,q. \times S\,P}$. Erat autem $P\,Q$ ad $R\,r$ ut $S\,Q$ ad $\frac{1}{2}V\,Q$, & inde $\frac{R\,r}{P\,Q\,q. \times S\,P}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}V\,Q}{P\,Q \times S\,P \times S\,Q}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}O\,S}{O\,P \times S\,P\,q.}$ Namque punctis P & Q coeuntibus, $S\,P$ & $S\,Q$ coincidunt; & ob ſimilia triangula $P\,V\,Q$, $P\,S\,O$, fit $P\,Q$ ad $\frac{1}{2}V\,Q$ ut $O\,P$ ad $\frac{1}{2}O\,S$. Eſt igitur $\frac{O\,S}{O\,P \times S\,P\,q.}$ ut reſiſtentia, id eſt in ratione denſitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii denſitas in P ut $\frac{O\,S}{O\,P \times S\,P}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem $O\,S$ ad $O\,P$, denſitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac Spirali. Q. E. *D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam $S\,P$.

Corol 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia $S\,P$, eſt ut $\frac{O\,S}{OP}$,

ſin

ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt ut lineæ Rr & TQ ſeu ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{PQq}{SP}$ quas ſimul generant, hoc eſt ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

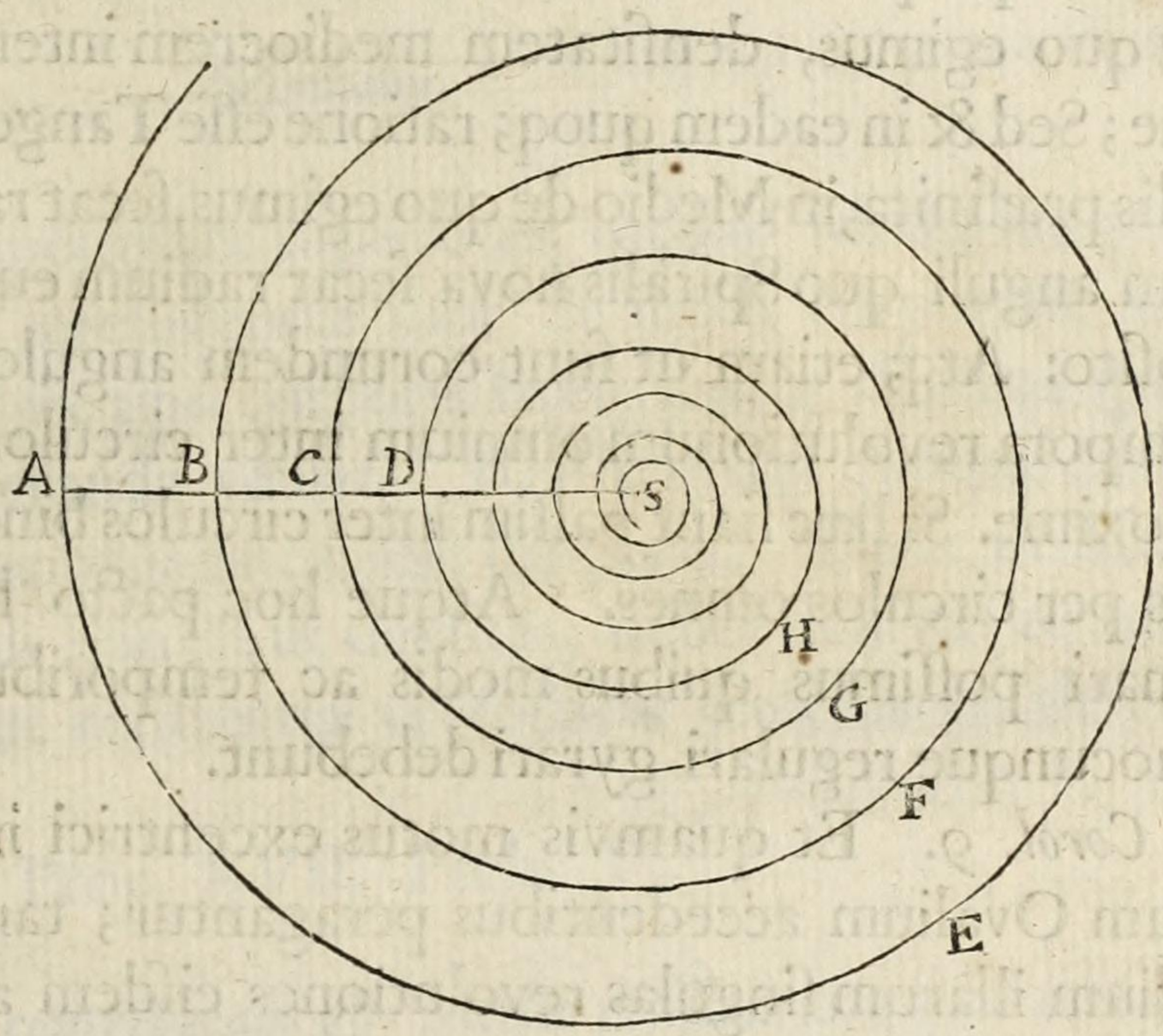
Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, dimidia ſemper cum velocitate qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri. Unde tempora deſcenſus hic erunt dupla majora temporibus illis atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR atque in recta SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus datis deſcribantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt reciproce ut Medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa

circâ centrum illud fecerit, & Radium primum *A S* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum a centro (id eſt ut *B S* ad mediam proportionalem inter *A S* & *C S*:) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones B*FC*, *C G D*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet Radium *A S* in partes *A S*, *B S*, *C S*, *D S* &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum *A E B*, *B F C*, *C G D* &c. directe,& velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverſe; id eſt ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $B\,S^{\frac{3}{2}}$, $C\,S^{\frac{1}{2}}$. Atq; tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ ut ſumma omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $C\,S^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}AS$ ad *A B*. Unde tempus illud totum expedite invenitur.



Corol. 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro *S* intervallis continue proportionalibus *S A*, *S B*, *S C* &c. deſcribe circulos

culos quotcunque, & ſtatue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, eſſe ad numerum revolutionum inter eoſdem in Medio propoſito, ut Medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quam proxime; Sed & in eadem quoq; ratione eſſe Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, ſecat radium *AS*, ad tangentem anguli quo Spiralis nova ſecat radium eundem in Medio propoſito: Atq; etiam ut ſunt eorundem angulorum ſecantes ita eſſe tempora revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum ſingulas revolutiones eiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut dignitas aliqua diſtantiæ locorum a centro, ſitque vis centripeta reciproce ut diſtantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eadem methodo cum Propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in *P* ſit reciproce ut diſtantiæ *SP* dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$; colligetur ut ſupra, quod tempus quo corpus deſcribit arcum quemvis *PQ* erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$

&

& resistentia in P ut $\frac{R\,r}{P\,Q\,q.\times SP^n}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}nV\,Q}{P\,Q\times SP^n\times SQ}$, adeque ut $\frac{\frac{1}{2}n\,OS}{OP\times SP^{n+1}}$. Et propterea densitas in P est reciproce ut SP^n.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali data lege revolvi potest. Vide *Fig. Prop.* XV.

Sit spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

Data lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detenere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECT. V.

De Densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile movetur inter se.

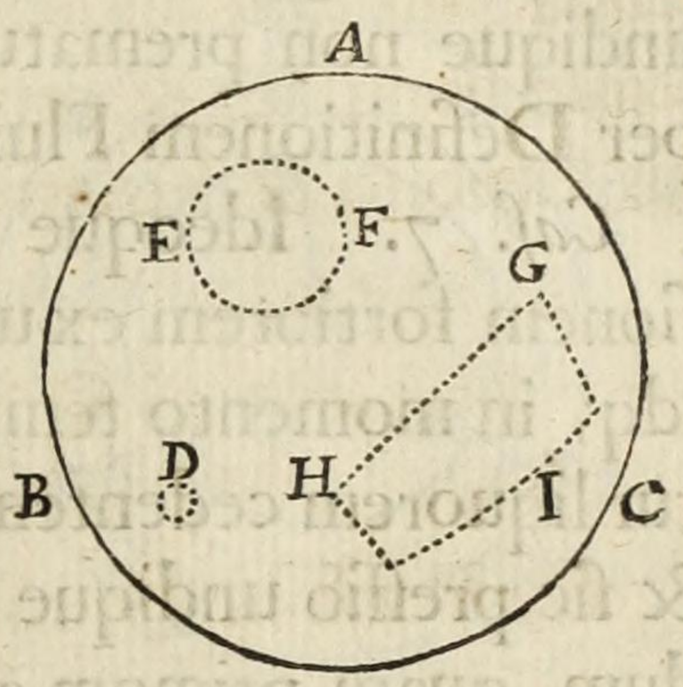
Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ Condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase sphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes ejusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atq; hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis excluſus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere

nisi

nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunq; quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q.E.D.*



Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique: sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undiq; non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usq; dum ipsa undiq; prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundum primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q.E.D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Casum secundum, undiq; premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q.E.D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubiq; premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus Sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem Tertiam. *Q.E.D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque *GHI*, quod undi-

que premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi Fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido Fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idq; in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem in momento temporis abſque motu locali; & ſubinde, partes fluidi per Caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

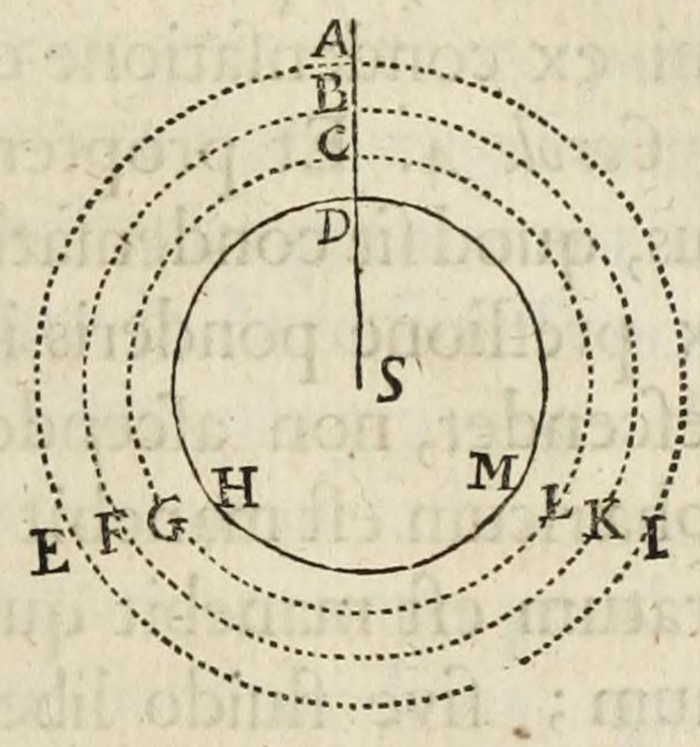
Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus Cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.

Sit *D H M* ſuperficies fundi, & *A E I* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *B F K*, *C G L* diſtinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem Orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *A E* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis ſupremi partes & ſuperficies

ſecunda

ſecunda *B F K* (per Prop. XIX.) premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *B F K* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *C G L*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus Orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc eſt gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (ſi modo Orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in Propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

Corol. 3.

Corol. 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si Sphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idq; ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX. jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis:

ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunq; vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

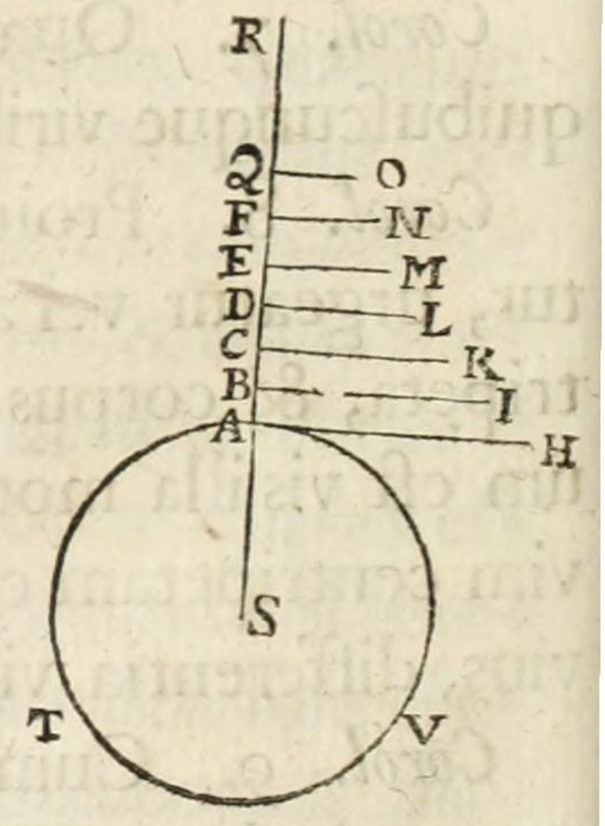
Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollaria Prop. XIX. quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu

tu partium oriatur; nec lædent corporibus immerſis, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

Prop. XXI. Theor. XV.

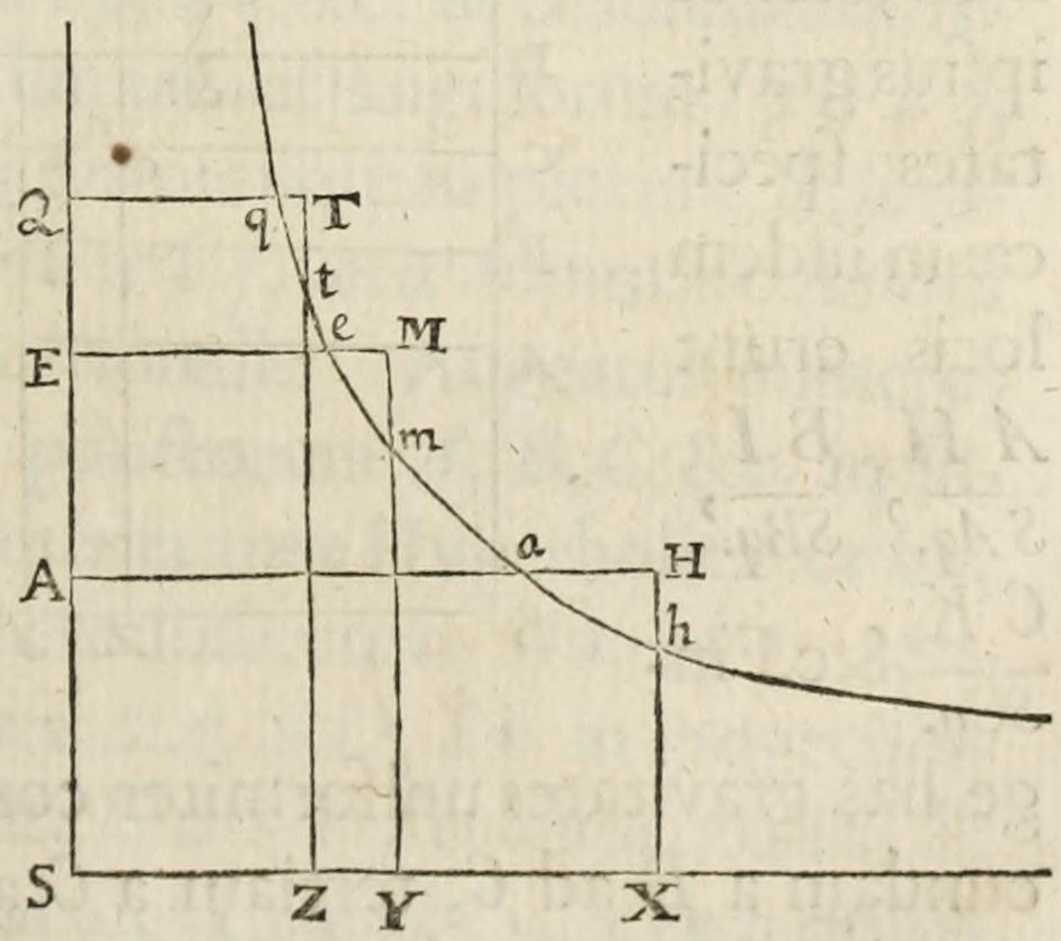
Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

Deſignet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$ &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema XIV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: adeoque



adeoque particulæ primæ *A* denſitas *AH* eſt ad particulæ ſecundæ *B* denſitatem *BI* ut ſumma omnium $AH+BI+CK+DL$, in infinitum, ad ſummam omnium $BI+CK+DL$, &c. Et *BI* denſitas ſecundæ *B*, eſt ad *CK* denſitatem tertiæ *C*, ut ſumma omnium $BI+CK+DL$, &c. ad ſummam omnium $CK+DL$, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per hujus Lem. I. proindeq; differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis *A*, *B*, *C* ſint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & (ex æquo) in diſtantiis *SA*, *SC*, *SE* continue proportionalibus, erunt denſitates *AH*, *CK*, *EM* continue proportionales. Et eodem argumento in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ* denſitates *AH*, *DL*, *QO* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo *A* ad ſummitatem Fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ*, denſitates *AH*, *DL*, *QT*, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, Aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ* ad aſymptoton *SX* demiſſa in *h*, *m*, & *t*. Fiat area *ZYmtZ* ad aream datam *Ymh X* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continue proportionales, erunt



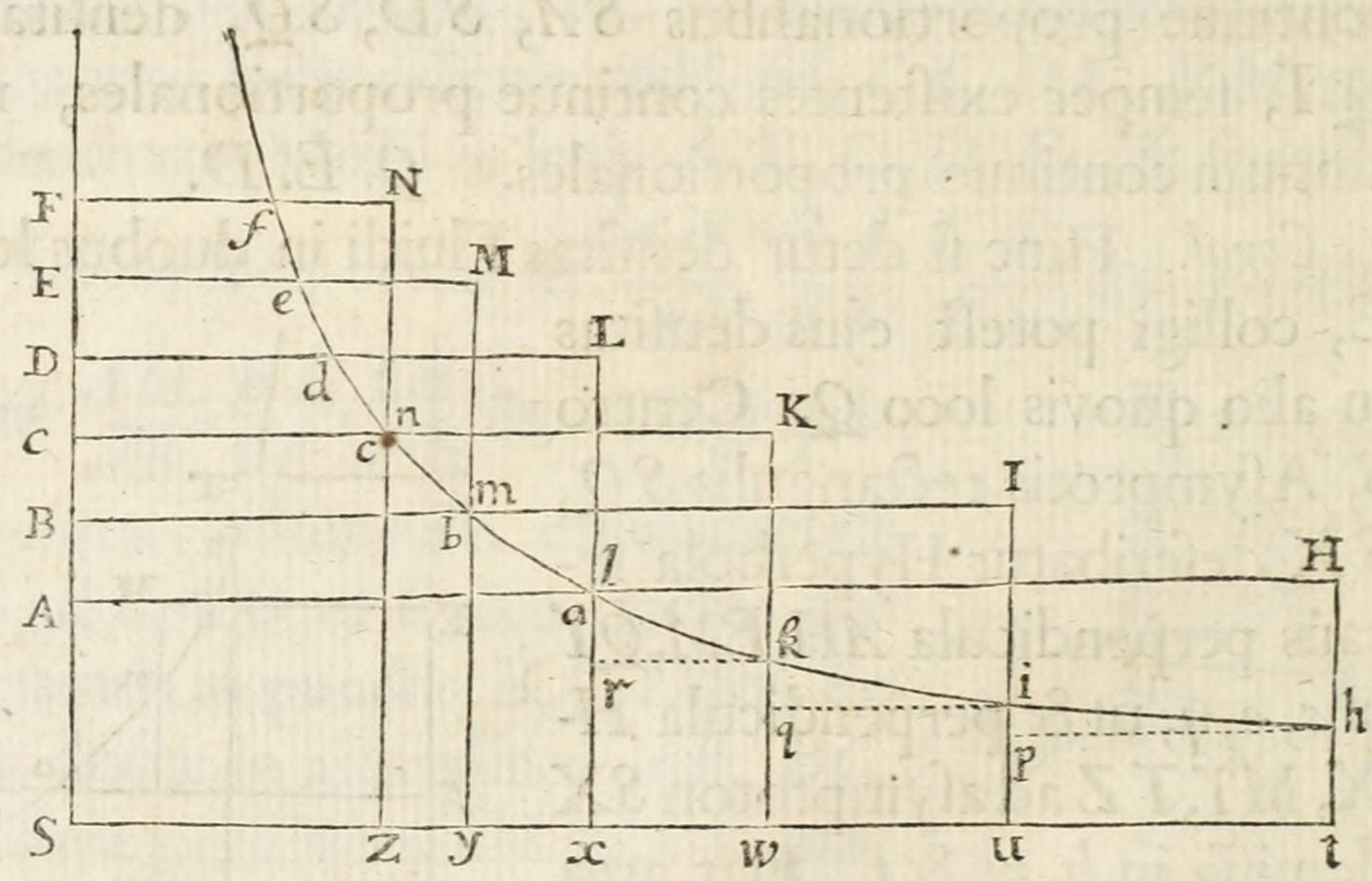
 areæ

areæ $EeqQ$, $EcaA$ æquales, & inde areæ his proportionales ΥmtZ, $Xb\,m\Upsilon$ etiam æquales & lineæ SX, $S\Upsilon$, SZ id eſt AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſica, denſitates Fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometrica.

Deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in Progreſſione Geometrica. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ ſint ut



Fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt AH BI $\frac{}{SAq.}$ $\frac{}{SBq.}$ $\frac{CK}{SCq.}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes

ponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Centro S Aſymptotis SA, SX deſcribatur Hyperbola quævis, quæ ſecet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c; ut & perpendicula ad Aſymptoton SX demiſſa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & denſitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu tp, uq. &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt ut Aa, Bb &c. Eſt enim ex natura Hyperbolæ SA ad AH vel St, ut th ad Aa, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æqualis Bb, &c. Sunt autem Aa Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quam plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $ztbn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $ztbn$, adeoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa - Ff$. Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in Progreſſione Muſica, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $tblx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt AH, DL, FN, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta *AH* & *CK*, dabitur area *thkw* harum differentiæ *tw* reſpondens; & inde invenietur denſitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, ſumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thkw* ut eſt differentia *Aa* − *Ff* ad differentiam *Aa* − *Cc*.

Scholium

Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione diſtantiarum a centro; & quadratorum diſtantiarum *SA*, *SB*, *SC*, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SA\,q.}$, $\frac{SA\,cub.}{SB\,q.}$, $\frac{SA\,cub.}{SC\,q.}$) ſumantur in progreſſione Arithmeca; denſitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicata ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SA\,q\,q.}{SA\,cub.}$, $\frac{SA\,q\,q.}{SB\,cub.}$, $\frac{SA\,q\,q.}{SC\,cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi Fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in

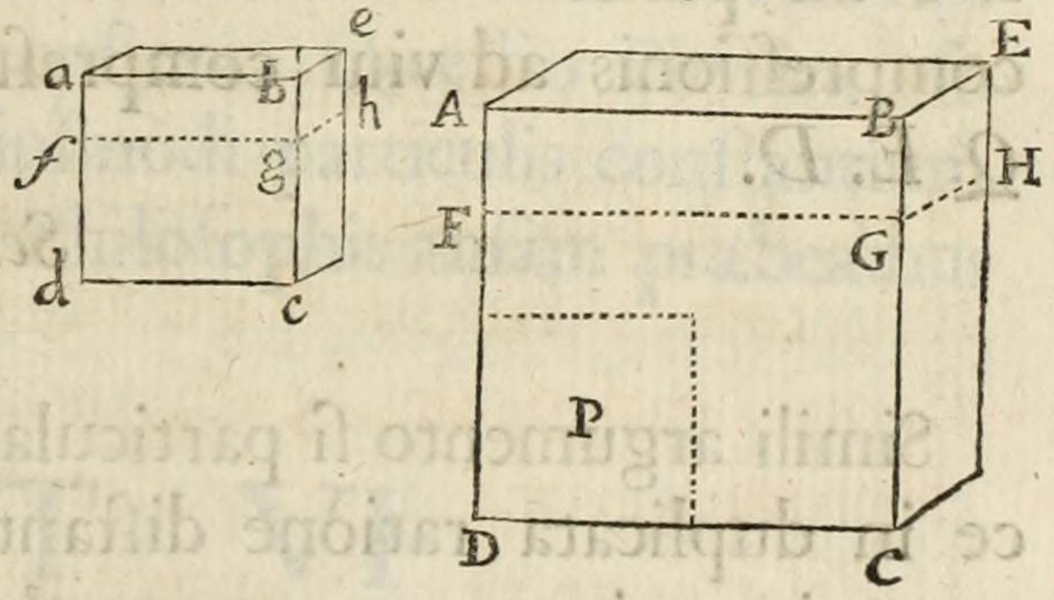
ſeſqui-

ſeſquiplicata ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione denſitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantiæ, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt Fluidum Elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis. Et vice verſa, ſi Fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum.

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*; & particularum ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium diſtantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii denſitates reciproce ut ſpatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypotheſi, preſſio qua quadratum *DP* urget Fluidum incluſum, erit ad preſſionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem, hoc eſt *ab cub.* ad *AB cub.* Sed preſſio qua quadratum *DB* urget Fluidum incluſum, eſt ad preſſionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc eſt ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo ex æquo preſſio qua latus *DB* urget Fluidum, eſt ad preſſionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh* per media cuborum ductis diſtinguatur Fluidum in duas partes, & hæ ſe mutuo prement iiſdem viribus



viribus, quibus premuntur a planis AC, ac, hoc eſt in proportione ab ad AB: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemq; ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, fgh exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum fgh in cubo minore ut ab ad AB, hoc eſt reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt reciproce ut cuborum latera AB, ab; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum DB, db ut ſummæ viriuin; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut $ab\ quad.$ ad $AB\ quad.$ Et ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris db ut $ab\ cub.$ ad $AB\ cub.$ id eſt vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet Dn, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis $En+2$, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum

rum Virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam niſi forte per particulas intermedias virtute illa auctas exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida de quibus actum eſt in hac propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſq; virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. Ut ſi particula unaquæq; vi ſua, quæ ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro ſuo, fugat alias omnes particulas in infinitum; Vires quibus Fluidum in vaſis ſimilibus æqualiter comprimi & condenſari poſſit, erunt ut quadrata diametrorum vaſorum: ideoque vis, qua Fluidum in eodem vaſe comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi denſitatis. An vero Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematice demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus Quæſtionem illam tractandi.

SECT. VI.

De Motu & reſiſtentia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe.

Quo

Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum cæteris paribus ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas Materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

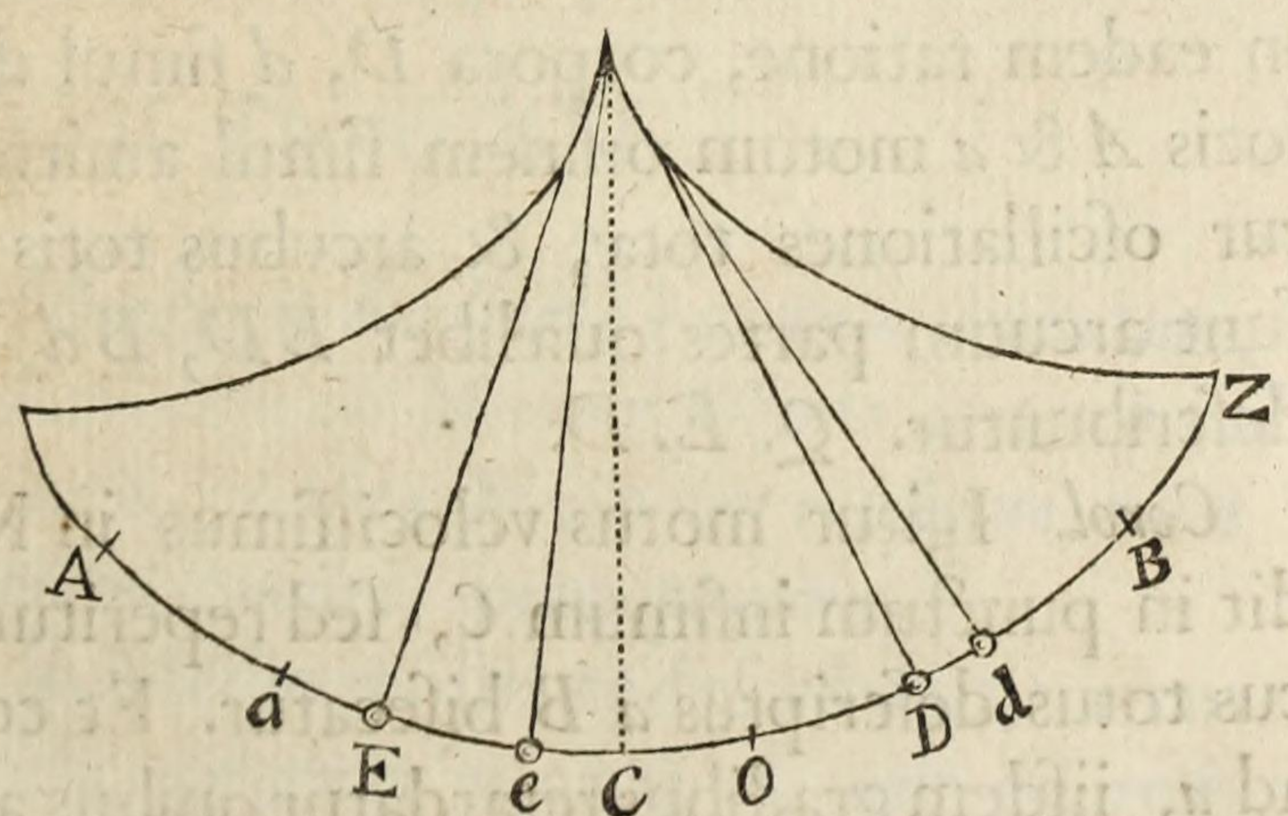
Corol. 7.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis, tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quæ in Medio quovis reſiſtuntur in ratione momentorum temporis, quæque in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit *A B* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *C D* vel *C d* vel *C E*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem *C O*, & ſumatur arcus *O d* in ratione ad arcum *C D* quam habet arcus *O B* ad arcum *C B*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *C d* ſupra reſiſtentiam *C O*, exponetur per arcum *O d*, adeoque erit ad vim qua corpus *D* urgetur in Medio non reſiſtente, in loco *D*, ut arcus *O d* ad arcum *C D*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *O B* ad arcum *C B*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco



B, &

B, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires ipſis *CD*, *Od* proportionales manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* ſemper erunt ut arcus toti *CD*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum *C*, & alterum in Medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *CB* & *OB*; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in Medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis qua corpus *d* in Medio reſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates in data illa ratione retardatæ manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *BE* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſenſu ſuo a *B* ad *O*.

Prop. XXVI.

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Funependulorum, quæ reſiſtuntur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, conferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. *Sed* in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Funependula reſiſtuntur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales *A*, *B*; & reſiſtentia corporis in arcu *A*, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id eſt ut *A quad.* ad *B quad.* quamproxime. Si reſiſtentia in arcu *B* eſſet ad reſiſtentiam in arcu *A* ut rectangulum *AB* ad *A quad.* tempora in arcubus *A* & *B* forent æqualia

per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia *A quad.* in arcu *A*, vel *AB* in arcu *B*, efficit exceſſum temporis in arcu *A* ſupra tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia *BB* efficit exceſſum temporis in arcu *B* ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes *AB* & *BB* quam proxime, id eſt ut arcus *A* & *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam ſi verbi gratia arcus alter ſit altero duplo major, differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corpora tardeſcentia paulo minus reſiſtuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

Prop. XXVIII. Theor. XXII.

Si corpus Funependulum in Cycloide oſcillans reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus

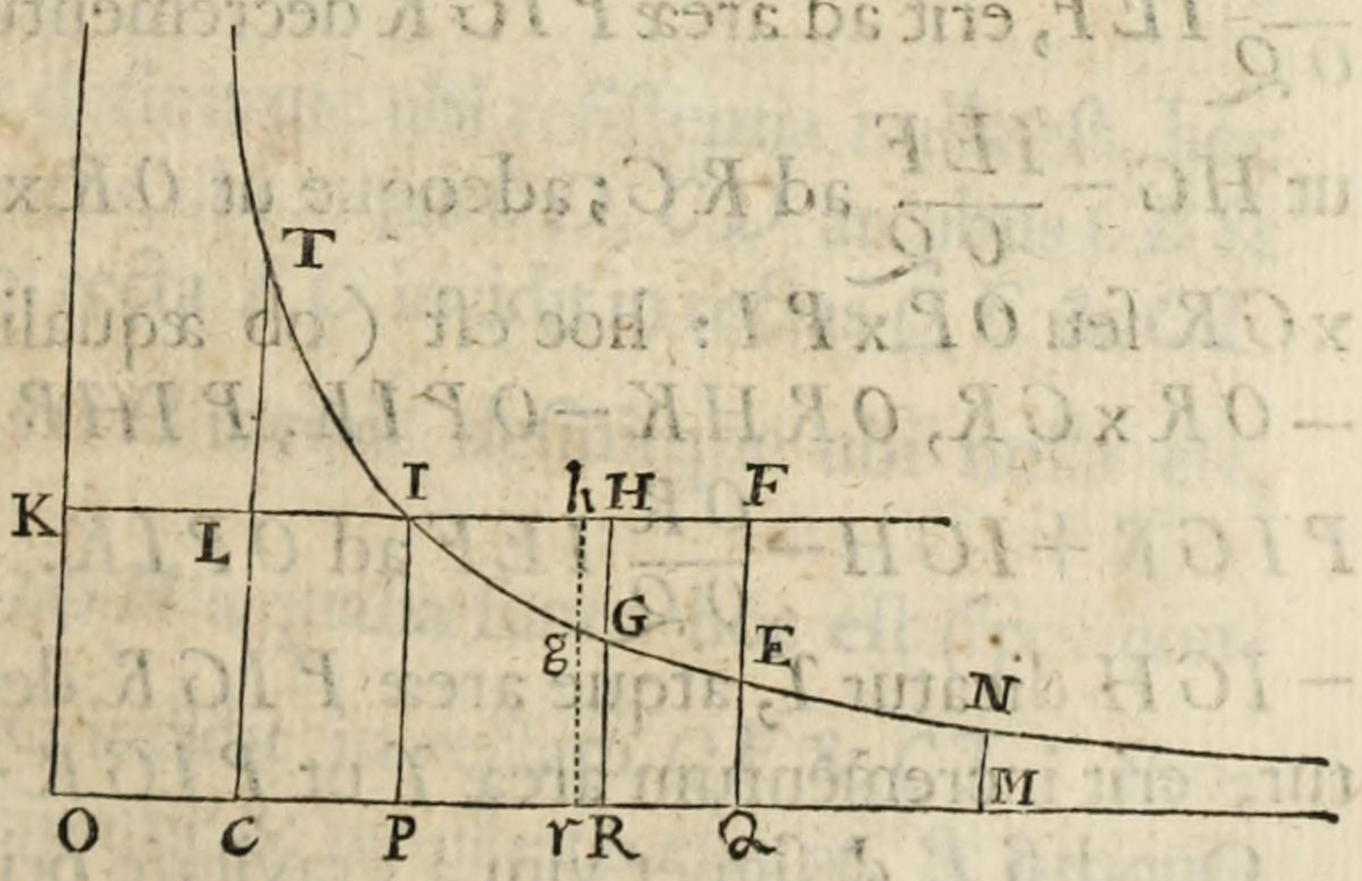
ceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione XXV. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis *D*, ad uim reſiſtentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis qua corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

Prop. XXIX. Prob. VII.

Poſito quod corpus in Cycloide oſcillans reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit *Ba* (*Fig. Prop.* XXV.) arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque *C* infimum Cycloidis punctum, & *CZ* ſemiſſis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *C*, *P*, *Q* ea lege ut (ſi erigantur perpendicula *OK*, *CT*, *PI*, *QE*, centroque *O* & Aſymptotis *OK*, *OQ* deſcribatur Hyperbola *TIGE* ſecans



perpendicula *CT*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* occurrens Aſymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *CT* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area Hyperbolica *PIEQ* ad aream Hyperbolicam

PITC

PITC ut arcus *BC* deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum *Ca* aſcenſu deſcriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OC*. Dein perpendiculo *MN* abſcindatur area Hyperbolica *PINM* quæ ſit ad aream Hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo *RG* abſcindatur area Hyperbolica *PIGR*, quæ ſit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* deſcenſu toto deſcriptum: erit reſiſtentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ ad aream *PIENM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, ſint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi ſint ut areæ *PINM*, *PIEQ*, *PIGR*, *PITC*; exponatur tum arcus tum vires per has areas reſpective. Sit inſuper *Dd* ſpatium quam minimum a corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG*, *rg* comprehenſam; & producatur *rg* ad *h*, ut ſint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH*, *PIGR* decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incrementum $GHhg-\frac{Rr}{OQ}IEF$, ſeu $Rr\times HG-\frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr* ſeu $Rr\times RG$, ut $HG-\frac{IEF}{OQ}$ ad *RG*; adeoque ut $OR\times HG-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR\times GR$ ſeu $OP\times PI$: hoc eſt (ob æqualia $OR\times HG$, $OR\times HR-OR\times GR$, $ORHK-OPIK$, *PIHR* & *PIGR*+*IGH*) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad *OPIK*. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur Υ, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ Υ ut $PIGR-\Upsilon$.

Quod ſi *V* deſignet vim a gravitate oriundam arcui deſcribendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*; & *R* pro reſiſtentia ponatur: erit $V-R$ vis tota qua corpus urgetur in *D*, adeoque

adeoque ut incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Est autem resistentia R (per Hypothesin) ut quadratum velocitatis, & inde (per Lem. II.) incrementum resistentiæ ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est ut spatium data temporis particula descriptum & $V - R$ conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR - Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Υ in ratione $PIGR - \Upsilon$, & area Z in ratione $PIGR - Z$. Et propterea si areæ Υ & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et viciſſim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo Ca, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum C, resistentia citius evanescet quam area Υ. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus CD, CD arcubus CB & Ca æquantur, adeoque ubi recta RG incidit in rectas QE & CT. Et area Υ seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta RG incidit in rectam QE & CT. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. I.

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ *IEF* ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR*—*Υ*) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in dimidiata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide abſque omni reſiſtentia oſcillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere, quæ & generalior ſit & ad uſus Philoſophicos abunde ſatis accurata.

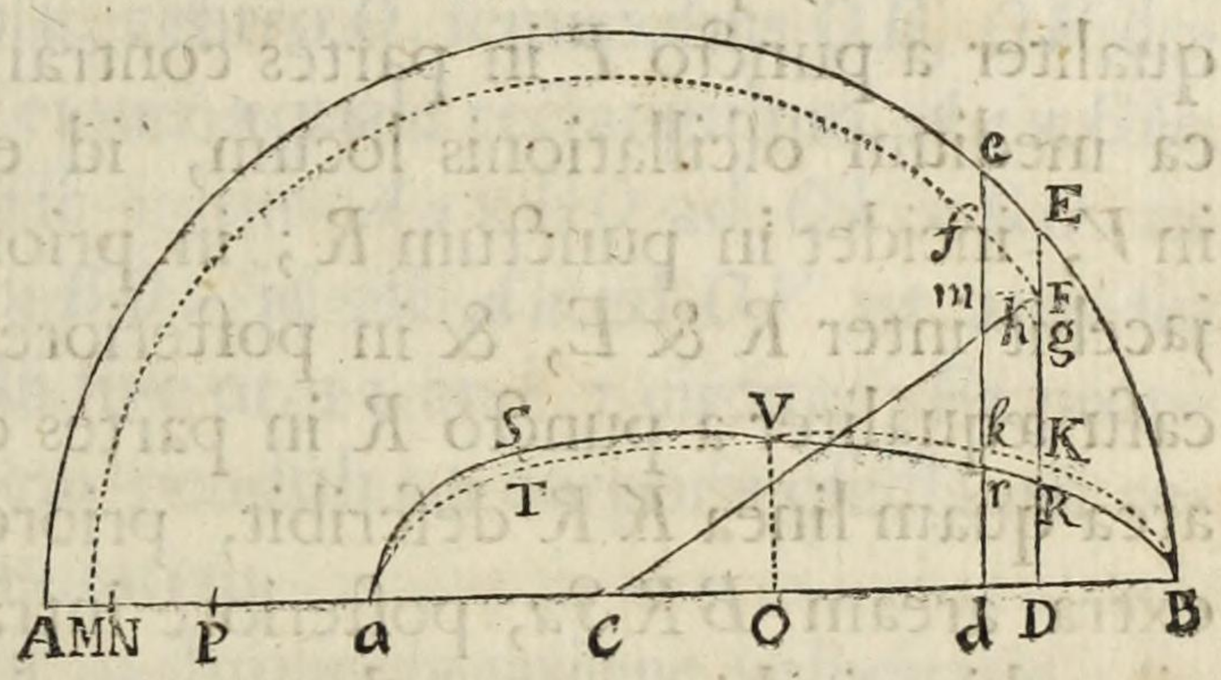
Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta a B *æqualis ſit Cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum, & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundam ſemiſummam, æqualis erit areæ* B K a B *a perpendiculis omnibus* D K *occupatæ, quamproxime.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *C* ſecundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli; & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad

longi-

longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *DK* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* conſtruatur ſemicirculus, *BEeA*. Deſcribet autem corpus tempore quam minimo ſpatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaq; hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; ſitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in Medio reſiſtente. Et ſi centro *C* & intervallo *CF* deſcribatur circulus *Ff M* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum quod corpus *D*, deſcribendo ſpatium quam minimum *Dd*, ex reſiſtentia Medii amittit, & ſumatur *CN* æqualis *Cg*; erit *N* locus ad quem corpus deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *MN* erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *fg* a reſiſtentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fma* vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob ſimilia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, eſt *fm* ad *Fm* ſeu *Dd*, ut *CD* ad *DF*, & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fg* ad *Fh* ut *CF* ad *DF*; & ex æquo perturbate *Fh* ſeu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF*. Sumatur *DR* ad $\frac{1}{2}$ *aB* ut *DK* ad *CF*, & erit *MN* ad *Dd* ut *DR* ad $\frac{1}{2}$ *aB*; ideoque ſumma omnium *MN* x $\frac{1}{2}$ *aB*, id eſt *Aa* x $\frac{1}{2}$ *aB*, æqualis erit ſummæ omnium *Dd* x *DR*, id eſt areæ *BRrSa*, quam rectangula omnia *Dd* x *DR*



 ſeu

ſeu $DRrd$ componunt. Biſecentur Aa & aB in P & O, & erit $\frac{1}{2}aB$ ſeu OB æqualis CP, ideoque DR eſt ad DK ut CP ad CF vel CM, & diviſim KR ad DR ut PM ad CP. Ideoque cum punctum M, ubi corpus verſatur in medio oſcillationis loco O, incidat circiter in punctum P, & priore oſcillationis parte verſetur inter A & P, poſteriore autem inter P & a, utroque in caſu æqualiter a puncto P in partes contrarias errans: punctum K circa medium oſcillationis locum, id eſt e regione puncti O, puta in V, incidet in punctum R; in priore autem oſcillationis parte jacebit inter R & E, & in poſteriore inter R & D, utroque in caſu æqualiter a puncto R in partes contrarias errans. Proinde area quam linea KR deſcribit, priore oſcillationis parte jacebit extra aream $BRSa$, poſteriore intra eandem, idque dimenſionibus hinc inde propemodum æquatis inter ſe; & propterea in caſu priore addita areæ $BRSa$, in poſteriore eidem ſubducta, relinquet aream $BKTa$ areæ $BRSa$ æqualem quam proxime. Ergo rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$ ſeu AaO, cum ſit æquale areæ $BRSa$, erit etiam æquale areæ $BKTa$ quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa, colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $aBKkS$ rectangulum erit ſub Ba & DK, & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æqualis erit rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Propoſitione XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, Figura $aBKkS$ Ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB deſcripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in Medio reſiſtente & BA in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; adeoque velocitates

locitates in ſingulis ipſius *Ba* punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *BA*, ut eſt *Ba* ad *BA*; erit velocitas *DK* in Medio reſiſtente ut circuli vel Ellipſeos ſuper diametro *Ba* deſcripti ordinatim applicata; adeoque figura *BKVTa* Ellipſis, quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit *OV* exponens reſiſtentiæ in puncto Medio *O*; & Ellipſis, centro *O*, ſemiaxibus *OB*, *OV* deſcripta, figuram *aBKVT*, eique æquale rectangulum *Aa* x *BO*, æquabit quam proxime. Eſt igitur *Aa* x *BO* ad *OV* x *BO* ut area Ellipſeos hujus ad *OV* x *BO*: id eſt *Aa* ad *OV* ut area ſemicirculi, ad quadratum radii ſive ut 11 and 7 circiter: Et propterea: $\frac{7}{11}$ *Aa* ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia *DK* ſit in duplicata ratione velocitatis, figura *BKTVa* Parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit duabus tertiis partibus rectanguli ſub *Ba* & *OV* quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ *Ba* & *Aa* æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *Ba* & *OV*, adeoque *OV* æqualis $\frac{3}{4}$ *Aa*, & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ *Aa* ad longitudinem Penduli.

Atque has concluſiones in rebus practicis abunde ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum Ellipſis vel Parabola congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc ſi ad partem alterutram *BKV* vel *VTa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & ſic eidem æquabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per reſi-

ſtentiam Medii, adeoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore Propoſitione rectangulum ſub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa, æqualis erat areæ BKT. Et area illa, ſi maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc eſt in ratione reſiſtentiæ, adeoque eſt ut longitudo aB & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub Aa & $\frac{1}{2}aB$ eſt ut aB & reſiſtentia conjunctim, & propterea Aa ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius; & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

SECT. VII.

SECT. VII.

De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Systemata duo ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint, singulæ in uno Systemate singulis in altero, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particulæ ille pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri; & contra.

Corpora similia temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incæptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur,

gitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per Legum Corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent ; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe : & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt per Corol. 1. 2, & 7. Prop. IV. ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter Syſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe, donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum denſitates ad invicem ut denſitates correſpondentium particularum : hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum Syſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe : & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque Syſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant : hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri ; atque adeo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

Prop. XXX III.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter eorum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem

tem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur ; vires autem motrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe : corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerenter in duplicata ratione velocitatis, projectile reſiſteretur in eadem ratione duplicata accurate ; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *T* ad vires *V* ; reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata ; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G* ; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqua-

litatem

litatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moventis eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum, ſunt etiam æquivelocium & celerrime moventium corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motus Legem tertiam) æqúalem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Cum autem particulæ Fluidorum, propter vires quibus ſe mutuo fugiunt, moveri nequeant quin ſimul agitent particulas alias in circuitu, atque adeo difficilius moveantur inter ſe quam ſi viribus iſtis deſtituerentur; & quo majores ſint earum

vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter ſe: manifeſtum eſſe videtur quod projectile in tali Fluido eo difficilius movebitur, quo vires illæ ſunt intenſiores; & propterea ſi corporis velociſſimi in ſuperioribus Corollariis velocitas diminuatur, quoniam reſiſtentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, ſi modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur; vires autem nullatenus diminuantur, manifeſtum eſt quod reſiſtentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam reſiſtentiam conducant, quod particulæ motus ſuos per Fluidum ad majorem a ſe diſtantiam per vires illas propagent; & cum diſtantia illa minorem habeat rationem ad majora corpora: manifeſtum eſt quod augmentum reſiſtentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus majoribus minoris ſit momenti; & propterea, quo corpora ſint majora eo magis accurate reſiſtentia tardeſcentium decreſcet in in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Unde etiam ratio illa duplicata magis accurate obtinebit in Fluidis quæ, pari denſitate & vi Elaſtica, ex particulis minoribus conſtant. Nam ſi corpora illa majora diminuantur, & particulæ Fluidi, manente ejus denſitate & vi Elaſtica, diminuantur in eadem ratione; manebit eadem ratio reſiſtentiæ quæ prius: ut ex præcedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita ſe habent in Fluidis, quorum vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar Lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis cauſa, qua motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in ſuperioribus Corollariis.

Prop. XXXIV.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in præcedentibus duabus Propoſitionibus demonſtrata ſunt, obtinent ubi particulæ Syſtematum ſe mutuo contingunt, ſi modo particulæ illæ ſint ſumme lubricæ.

Concipe particulas viribus quibuſdam ſe mutuo fugere, & vires illas in acceſſu ad ſuperficies particularum augeri in infinitum, & contra, in receſſu ab iiſdem celerrime diminui & ſtatim evaneſcere. Concipe etiam ſyſtemata comprimi, ita ut partes eorum ſe mutuo contingant, niſi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sint autem ſpatia per quæ vires particularum diffunduntur quam anguſtiſſima, ita ut particulæ ſe mutuo quam proxime contingant: & motus particularum inter ſe iidem erunt quam proxime ac ſi ſe mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter ſe ac ſi eſſent ſumme lubricæ, & ſi impingant in ſe mutuo reflectentur ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac ſi eſſent Elaſticæ. Itaque motus erunt iidem in utroque caſu, niſi quatenus perexigua particularum ſeſe non contingentium intervalla diverſitatem efficiant: quæ quidem diverſitas diminuendo particularum intervalla diminui poteſt in infinitum. Jam vero quæ in præcedentibus duabus Propoſitionibus demonſtrata ſunt, obtinent in particulis ſeſe non contingentibus, idque licet intervalla particularum, diminuendo ſpatia per quæ vires diffundunur, diminuantur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis ſeſe contingentibus, exceptis ſolum differentiis quæ tandem differentiis quibuſvis datis minores evadant. Dico igitur quod accurate obtinent. Si negas, aſſigna differentiam in caſu quocunque. Atqui jam probatum eſt quod differentia minor ſit quam data quævis. Ergo differentia falſo aſſignatur, & propterea nulla eſt. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi Syſtematum duorum partes omnes quieſcant inter ſe, exceptis duabus, quæ cæteris majores ſint & ſibi

mutuo correſpondeant inter cæteras ſimiliter ſitæ. Hæ ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projectæ ſimiles excitabunt motus in Syſtematibus, & temporibus proportionalibus pergent ſpatia ſimilia & diametris ſuis proportionalia deſcribere ; & reſiſtentur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Syſtematum.

Corol. 2. Unde ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo ſimilia, & eorum partes duæ majores ſint corpora in iiſdem projecta: ſint autem Fluidorum particulæ ſumme lubricæ, & quoad magnitudinem & denſitatem proportionales corporibus: pergent corpora temporibus proportionalibus ſpatia ſimilia & diametris ſuis proportionalia deſcribere, & reſiſtentur in ratione Corollario ſuperiore definita.

Corol. 3. Proinde in eodem Fluido Projectile magnitudine datum reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis.

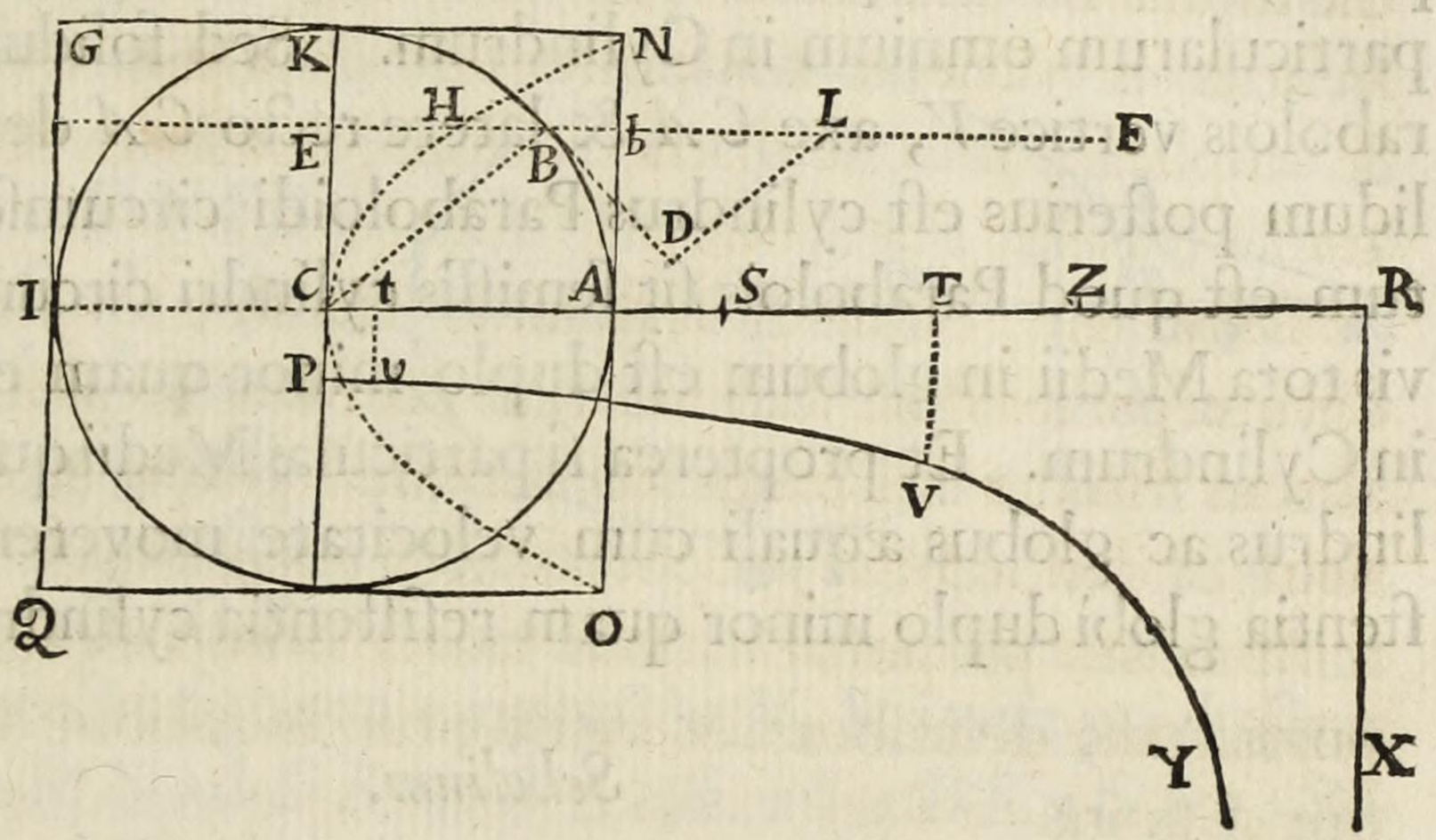
Corol. 4. At ſi particulæ Fluidi non ſint ſumme lubricæ, vel ſi viribus quibuſcunque ſe mutuo agitant, quibus motuum libertas diminuitur: Projectilia tardiora difficilius ſuperabunt reſiſtentiam, & propterea magis reſiſtentur quam in velocitatis ratione duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio raro & Elaſtico, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate celerrime moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri.

Nam quoniam reſiſtentia (per Corol. 3. Prop. XXXIII.) eadem eſt quam proxime ac ſi partes Fluidi viribus nullis ſe mutuo fugerent, ſupponamus partes Fluidi ejuſmodi viribus deſtitutas per ſpatia omnia uniformiter diſpergi. Et quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ eadem cum veloci-

velocitate impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Deſignet igitur *A B K I* corpus Sphæricum centro *C* ſemidiametro *C A* deſcriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi *A C* parallelas: Sitque *F B* ejuſmodi recta.

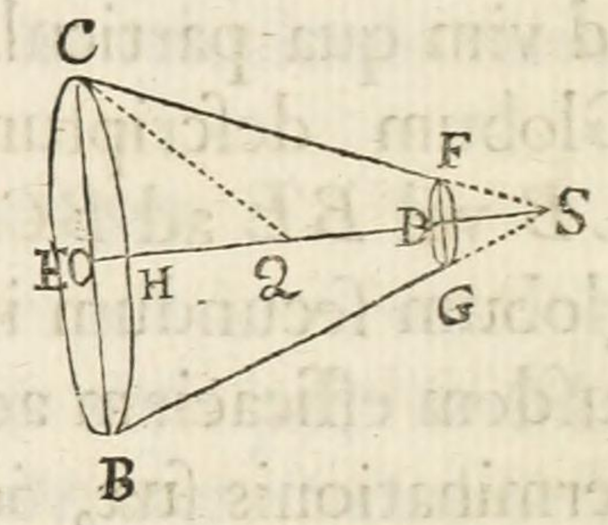


In ea capiatur *L B* ſemidiametro *C B* æqualis, & ducatur *B D* quæ Sphæram tangat in *B*. In *A C* & *B D* demittantur perpendiculares *B E*, *D L*, & vis qua particula Medii, ſecundum rectam *F B* oblique incidendo, Globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum *O N G Q* axe *A C I* circa Globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *L D* ad *L B* vel *B E* ad *B C*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *F B* vel *A C*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt ſecundum plagam rectæ *B C* qua globum directe urget, ut *B E* ad *E C*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in globum ſecundum rectam *F B* oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut *B E* quadratum ad *B C* quadratum. Quare ſi ad cylindri baſem circularem *N A O* erigatur perpendiculum *b H E*, & ſit *b E* æqualis radio *A C*, & *b H* æqualis $\frac{CE\ quad.}{CB}$, erit *b H* ad *b E*

b E ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus *b H* occupatur erit ad ſolidum quod a rectis omnibus *b E* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed ſolidum prius eſt Parabolois vertice *V*, axe *C A* & latere recto *C A* deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod Parabolois ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.*

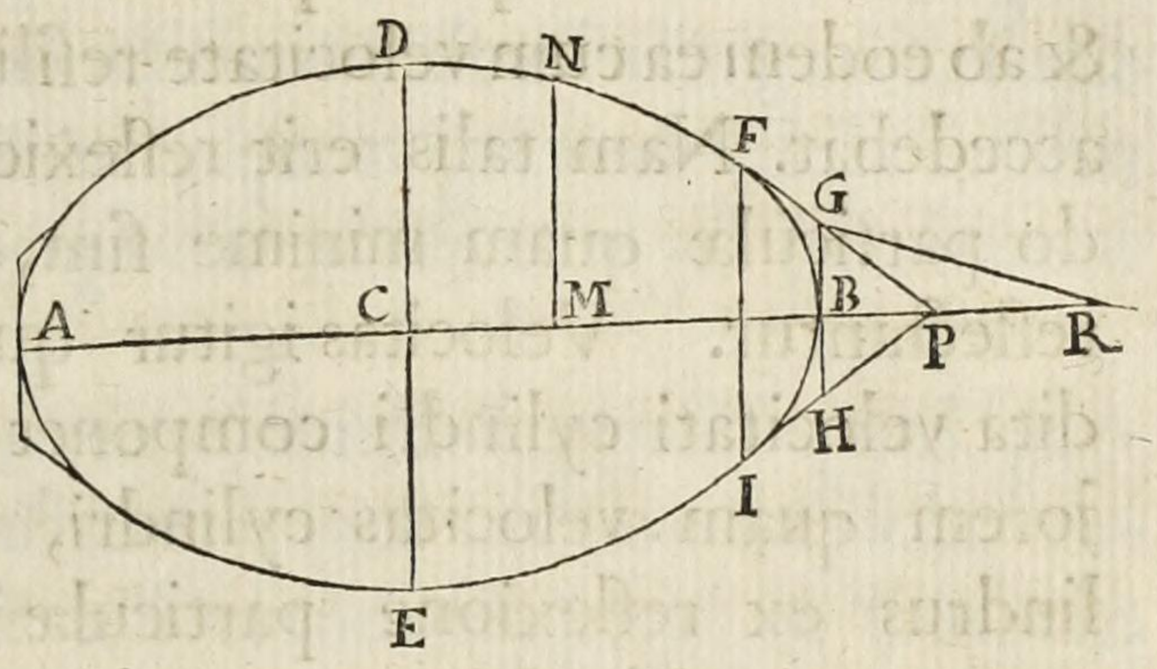
Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in Mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *O C* deſcribitur, & altitudine *O D*, conſtruendum ſit fruſtrum coni *C B G F*, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plaga maxis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem *O D* in *Q* & produc, *O Q* ad *S* ut ſit *Q S* æqualis *Q C*, & erit *S* vertex coni cujus fruſtum quæritur.



Unde obiter cum angulus *C S B* ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum *A D B E* convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis *A D B E* circa axem *A B* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *F G*, *G H*, *H I* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *G H* ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *F G*, *H I* cum eadem *G H* contineant angulos *F G B*, *B H I* graduum 135: ſolidum, quod convolutione figuræ *A D F G H I E* circa axem

em eundem *C B* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *A B* progrediatur, & utriuſque terminus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.



Quod ſi figura *D N F B* ejuſmodi ſit ut, ſi ab ejus puncto quovis *N* ad axem *A B* demittatur perpendiculum *N M*, & a puncto dato *G* ducatur recta *G R* quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum ſecet in *R*, fuerit *M N* ad *G R* ut *G R cub.* ad $4\,B\,R \times G\,B\,q$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *A B* facta deſcribitur, in Medio raro & Elaſtico ab *A* verſus *B* velociſſime movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum Solidum circulare.

Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire reſiſtentiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elaſtico velociſſime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Deſignet *A B K I* corpus Sphæricum centro *C* ſemidiametro *C A* deſcriptum. Producatur *C A* primo ad *S* deinde ad *R*, ut ſit *A S* pars tertia ipſius *C A*, & *C R* ſit ad *C S* ut denſitas corporis Sphærici ad denſitatem Medii. Ad *C R* erigantur perpendicula *P C*, *R X*, centroque *R* & Aſymptotis *C R*, *R X* deſcribatur Hyperbola quævis *P V Y*. In *C R* capiatur *C T* longitudinis cujuſvis, & erigatur perpendiculum *T V* abſcindens aream Hyperbolicam *P C T V*, & ſit *C Z* latus hujus areæ applicatæ ad rectam *P C*. Dico quod motus quem globus, deſcribendo ſpatium *C Z*, ex reſiſtentia Medii amittet, erit ad ejus motum totum ſub initio ut longitudo *C T* ad longitudinem *C R* quamproxime. Nam

Nam (per motuum Legem tertiam) motus quem cylindrus *GNOQ* circa globum deſcriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis eſt motui quem imprimeret in eaſdem particulas. Ponamus quod particulæ ſingulæ reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate reſiliant, quacum cylindrus ad ipſas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. ſi modo particulæ quam minime ſint, & vi Elaſtica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro reſiliunt, addita velocitati cylindri componet totam velocitatem duplo majorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulæ cujuſque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum denſitas Medii ſit ad denſitatem cylindri ut CS ad CR; ſi Ct ſit longitudo tempore quam minimo a cylindro deſcripta, erit motus eo tempore amiſſus ad motum totum cylindri ut $2Ct \times CS$ ad $AI \times CR$. Ea enim eſt ratio materiæ Medii, a cylindro protruſæ & reflexæ, ad maſſam cylindri. Unde cum globus ſit duæ tertiæ partes cylindri, & reſiſtentia globi (per Propoſitionem ſuperiorem) ſit duplo minor quam reſiſtentia cylindri: erit motus, quem globus deſcribendo longitudinem L amittit, ad motum totum globi, ut $Ct \times CS$ ad $\frac{2}{3} AI \times CR$, ſive ut Ct ad CR. Erigatur perpendiculum tv Hyperbolæ occurrens in v, & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II) ſi corpus deſcribendo longitudinem areæ $CtvP$ proportionalem, amittit motus ſui totius CR partem quamvis Ct, idem deſcribendo longitudinem areæ $CTVP$ proportionalem, amittet motus ſui partem CT. Sed longitudo Ct æqualis eſt $\frac{CPvt}{CP}$, & longitudo OZ (per Hypotheſin) æqualis eſt $\frac{CPTV}{CP}$, adeoque longitudo Ct eſt ad longitudinem CZ ut area $CPvt$ ad aream $CPVT$. Et propterea cum globus deſcribendo longitudinem quam minimam Ct amittat motus ſui partem, quæ ſit ad totum ut Ct ad CR, is deſcribendo

deſcribendo longitudinem aliam quamvis CZ, amittet motus ſui partem quæ ſit ad totum ut CT ad CR. *Q.E.D.*

Corol. 1. Si detur corporis velocitas ſub initio, dabitur tempus quo corpus, deſcribendo ſpatium Ct, amittet motus ſui partem Ct: & inde, dicendo quod reſiſtentia ſit ad vim gravitatis ut iſta motus pars amiſſa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio reſiſtentiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in his determinandis ſuppoſui quod particulæ Fluidi per vim ſuam Elaſticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum ſic reflexarum impetus in Globum duplo major ſit quam ſi non reflecterentur: manifeſtum eſt quod in Fluido, cujus particulæ vi omni Elaſtica aliaque omni vi reflexiva deſtituuntur, corpus Sphæricum reſiſtentiam duplo minorem patietur; adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro conſtructione Problematis hujus ſuperius allata.

Corol. 3. Et ſi particularum vis reflexiva neque maxima ſit neque omnino nulla, ſed mediocrem aliquam rationem teneat: reſiſtentia pariter, inter limites in conſtructione Problematis & Corollario ſuperiore poſitos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis reſiſtantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc deſcribendo longitudinem quamvis CZ amittent majorem motus ſui partem, quam quæ ſit ad motum ſuum totum ut CT ad CR.

Corol. 5. Cognita autem reſiſtentia corporum celerrimorum, innoteſcet etiam reſiſtentia tardorum; ſi modo lex decrementi reſiſtentiæ pro ratione velocitatis inveniri poteſt.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aquæ de vaſe dato per foramen effluentis definire motum.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifeſtum eſt quod vas ſuſtinebit pondus aquæ totius, dempto pondere partis illius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam ſi foramen obſtaculo aliquo occluderetur, obſtaculum ſuſtineret pondus aquæ ſibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vaſis ſuſtineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obſtaculo, fundum vaſis eadem aquæ preſſione eodemve ipſius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obſtaculum ſuſtinebat, cum jam non ſuſtineatur, faciet ut aqua deſcendat & per foramen defluat.

Unde conſequens eſt, quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare poſſit. Nam aquæ particula unaquæque pondere ſuo, quatenus non impeditur, deſcendit, idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur, urgebit obſtaculum. Obſtaculum illud vel vaſis eſt fundum, vel aqua inferior defluens; & propterea ponderis pars illa, quam vaſis fundum non ſuſtinet, urgebit aquam defluentem & motum ſibi proportionalem generabit.

Deſignet igitur F aream foraminis, A altitudinem aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, P pondus ejus, AF quantitatem ejus, S ſpatium quod dato quovis tempore T in vacuo libere cadendo deſcriberet, & V velocitatem quam in fine temporis illius cadendo acquiſierit: & motus ejus acquiſitus $AF \times V$ æqualis erit motui aquæ totius eodem tempore effluentis. Sit velocitas quacum effluendo exit de foramine, ad velocitatem V ut d ad e; & cum aqua velocitate V deſcribere poſſet ſpatium $2S$, aqua effluens eodem tempore, velocitate ſua $\frac{d}{e}V$, deſcribere poſſet ſpatium $\frac{2d}{e}S$. Et propterea columna aquæ cujus longitudo

ſit

sit $\frac{2d}{e}S$ & latitudo eadem quæ foraminis, posset eo tempore defluendo egredi de vase, hoc est columna $\frac{2d}{e}SF$. Quare motus $\frac{2dd}{ee}SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem suam, hoc est motus omnis tempore effluxus illius genitus, æquabitur motui $AF \times V$. Et si æquales illi motus applicenter ad FV; fiet $\frac{2dd}{ee}S$ æqualis A. Unde est dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2}A$ ad S. Est igitur velocitas quacum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo describens spatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & spatium illud S, quod corpus tempore T cadendo describeret.

Igitur si motus illi sursum vertantur; quoniam aqua velocitate V ascenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum est) sint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens ascenderet ad altitudinem $\frac{1}{2}A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis, quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem $\frac{1}{2}A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminentis.

Cum autem aqua effluens, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis; consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describet in spatiis non resistentibus Parabolam cujus latus rectum est altitudo aquæ in vase supra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido subtilissimo intelligenda sunt. Nam si aqua ex partibus crassioribus constet, hæc tardius effluet quam pro ratione superius assignata, præsertim si foramen angustum sit per quod effluit.

Denique ſi aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur ; quoniam fundum vaſis integrum eſt, & eadem aquæ incumbentis preſſione ubique urgetur ac ſi aqua non efflueret ; vas ſuſtinebit pondus aquæ totius, non obſtante effluxu, ſed latus vaſis de quo effluit non ſuſtinebit preſſionem illam omnem, quam ſuſtineret ſi aqua non efflueret. Tolletur enim preſſio partis illius ubi perforatur : quæ quidem preſſio æqualis eſt ponderi columnæ aquæ, cujus baſis foramini æquatur & altitudo eadem eſt quæ aquæ totius ſupra foramen. Et propterea ſi vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo ſuſpendatur, hoc, ſi aqua in plagam quamvis ſecundum lineam horizontalem effluit, recedet ſemper a perpendiculo in plagam contrariam. Et par eſt ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefacto implentur,&, materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

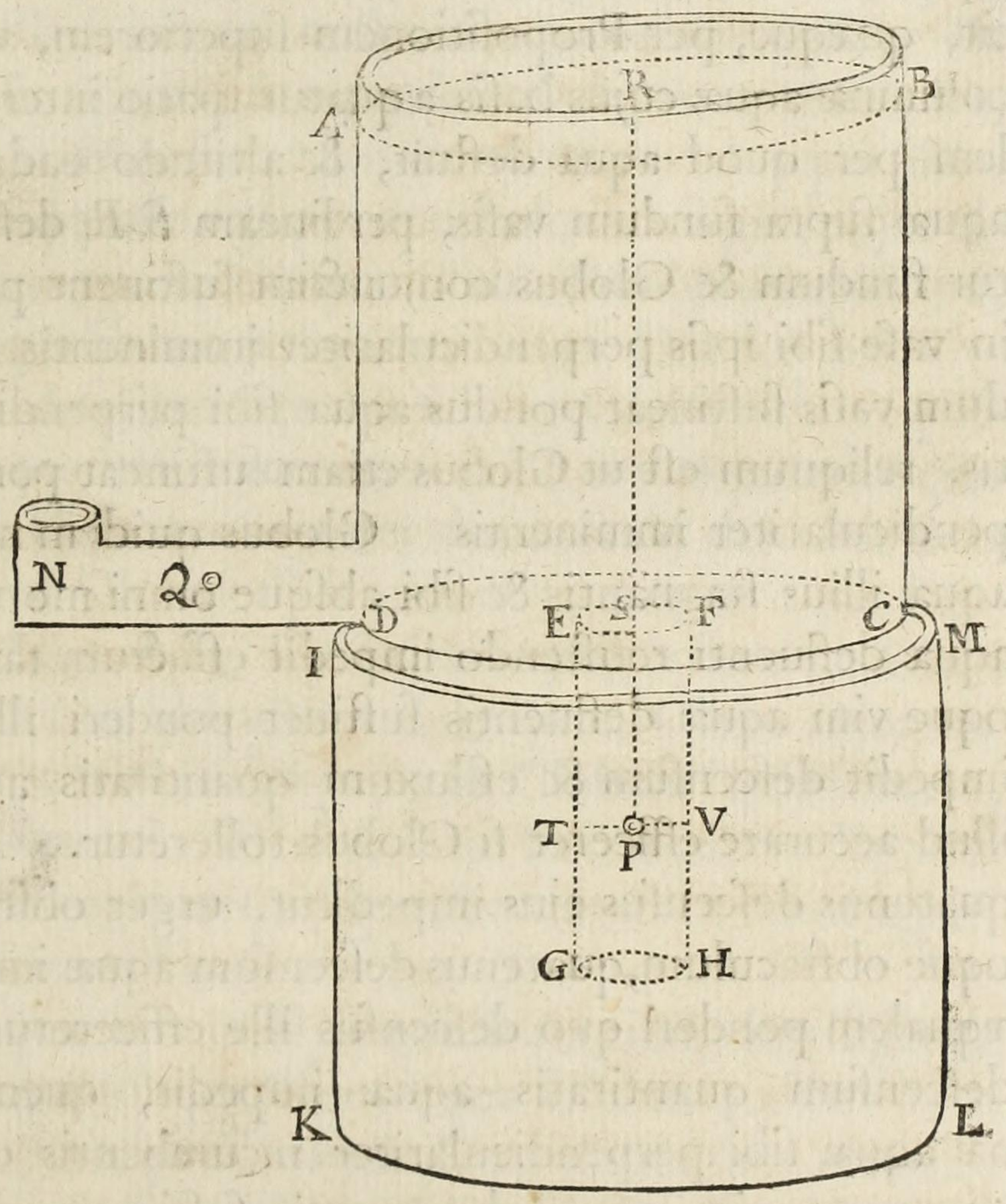
Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

Corporum Sphæricorum in Mediis quibuſque Fluidiſſimis reſiſtentiam in anteriore ſuperficie definire.

Defluat aqua de vaſe Cylindrico $ABCD$, per canalem Cylindricum $EFGH$, in vas inferius $IKLM$; & inde effluat per vaſis marginem IM. Sit autem margo ille ejuſdem altitudinis cum vaſis ſuperioris fundo CD, eo ut aqua per totum canalem uniformi cum motu deſcendat ; & in medio canalis collocetur Globus P, ſitque PR altitudo aquæ ſupra Globum, & SR ejuſdem altitudo ſupra fundum vaſis. Suſtineatur autem Globus filo tenuiſſimo TV, lateribus canalis hinc inde affixo. Et manifeſtum eſt per proportionem ſuperiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit ; hoc eſt, ſi Globus tollatur, ut canalis orificium : ſin Globus adſit, ut ſpatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per ſuperiorem Propoſitionem) ea erit

quam

quam corpus cadendo, & casu suo describendo dimidiam aquæ altitudinem *SR*, acquirere posset: adeoque eadem est sive Globus tollatur, sive adsit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo spatii per quod transit. Certe transitus aquæ per spatium angustius facilior esse nequit quam per spatium amplius, & propterea velocitas ejus ubi Globus adest, non potest esse major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adest, non effluet quam pro ratione spatii per quod transit. Si aqua non sit liquor subtilissimus & fluidissimus, hujus transitus per spatium angustius, ob crassitudinem particularum, erit aliquanto tardior: at liquorem fluidissimum esse hic supponimus. Igitur quantitas aquæ, cujus descensum Globus dato tempore impedit, est ad quantitatem aquæ quæ, si Globus tolleretur, eodem tempore descenderet, ut basis Cylindri circa Globum descripti ad orificium canalis; sive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus descensum Globus impedit, æqualis est quantitati aquæ, quæ eodem



tempore

tempore per foramen circulare in fundo vaſis, baſi Cylindri illius æquale, deſcendere poſſet, & cujus deſcenſus per fundi partem quamvis circularem baſi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus conjunctim ſuſtinent, eſt pondus aquæ totius in vaſe, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat,& ad ejus motum generandum ſufficit, quæque, per Propoſitionem ſuperiorem, æqualis eſt ponderi columnæ aquæ cujus baſis æquatur ſpatio inter Globum & canalem per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ ſupra fundum vaſis, per lineam *S R* deſignata. Vaſis igitur fundum & Globus conjunctim ſuſtinent pondus aquæ totius in vaſe ſibi ipſis perpendiculariter imminentis. Unde cum fundum vaſis ſuſtineat pondus aquæ ſibi perpendiculariter imminentis, reliquum eſt ut Globus etiam ſuſtineat pondus aquæ ſibi perpendiculariter imminentis Globus quidem non ſuſtinet pondus aquæ illius ſtagnantis & ſibi abſque omni motu incumbentis, ſed aquæ defluenti reſiſtendo impedit effectum tanti ponderis; adeoque vim aquæ defluentis ſuſtinet ponderi illi æqualem. Nam impedit deſcenſum & effluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret ſi Globus tolleretur. Aqua pondere ſuo, quatenus deſcenſus ejus impeditur, urget obſtaculum omne, ideoque obſtaculum,quatenus deſcenſum aquæ impedit, vim ſuſtinet æqualem ponderi quo deſcenſus ille efficeretur. Globus autem deſcenſum quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ ſibi perpendiculariter incumbentis efficere poſſet; & propterea vim aquæ decurrentis ſuſtinet ponderi illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motus Legem tertiam æquantur inter ſe, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam deſcendentem, ad ejus deſcenſum impediendum, in ſuperiora dirigitur, & eſt ut deſcendendi motus impeditus, eique tollendo adæquate ſufficit: & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis eſt vi quæ motum eundem vel tollere vel generare poſſit,

hoc

hoc eſt ponderi columnæ aquæ, quæ Globo perpendiculariter imminet & cujus altitudo eſt *R S*.

Si jam canalis orificium ſuperius obſtruatur, ſic ut aqua deſcendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vaſe inferiore *I K L M* ſtagnantis, premetur undique; ſed non obſtante preſſione illa, ſi ejuſdem ſit ſpecificæ gravitatis cum aqua, quieſcet. Preſſio illa Globum nullam in partem impellet. Et propterea ubi canalis aperitur & aqua de vaſe ſuperiore deſcendit, vis omnis, qua Globus impellitur deorſum, orietur ab aquæ illius deſcenſu, atque adeo æqualis erit ponderi columnæ aquæ, cujus altitudo eſt *R S* & diameter eadem quæ Globi. Pondus autem iſtud, quo tempore data quælibet aquæ quantitas, per foramen baſi Cylindri circa Globum deſcripti æquale, ſublato Globo effluere poſſet, ſufficit ad ejus motum omnem generandum; atque adeo quo tempore aqua in Cylindro uniformiter decurrendo deſcribit duas tertias partes diametri Globi, ſufficit ad motum omnem aquæ Globo æqualis generandum. Nam Cylindrus aquæ, latitudine Globi & duabus tertiis partibus altitudinis deſcriptus, Globo æquatur. Et propterea aquæ currentis impetus in Globum quieſcentem, quo tempore aqua currendo deſcribit duas tertias partes diametri Globi, ſi uniformiter continuetur, generaret motum omnem partis Fluidi quæ Globo æquatur.

Quæ vero de aqua in canali demonſtrata ſunt, intelligenda ſunt etiam de aqua quacunque fluente, qua Globus quilibet in ea quieſcens urgetur. Quæque de aqua demonſtrata ſunt obtinent etiam in Fluidis univerſis ſubtiliſſimis. De his omnibus idem valet argumentum.

Jam vero per Legum Corol. 5, vis Fluidi in Globum eadem eſt, ſive Globus quieſcat & Fluidum uniformi cum velocitate moveatur, ſive Fluidum quieſcat & Globus eadem cum velocitate in partem contrariam pergat. Et propterea reſiſtentia Globi in Medio quocunque Fluidiſſimo uniformiter progredientis, quo tempore Globus duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, æqua-

lis

lis eſt vi, quæ in corpus ejuſdem magnitudinis cum Globo & ejuſdem denſitatis cum Medio uniformiter impreſſa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri ſuæ progrediendo deſcribit, velocitatem Globi in corpore illo generare poſſet. Tanta eſt reſiſtentia Globi in ſuperficiei parte præcedente. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si ſolidum Sphæricum in ejuſdem ſecum denſitatis Fluido ſubtiliſſimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quieſcit; ejuſdem reſiſtentia ea erit quam in Corollario ſecundo Propoſitionis xxxvi. deſcripſimus. Unde ſi computus ineatur, patebit quod ſolidum dimidiam motus ſui partem prius amittet, quam progrediendo deſcripſerit longitudinem diametri propriæ; Quod ſi inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, ſi magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt reſiſtentiam projectilium per infinitam diviſionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum ſit valde craſſum, minuetur reſiſtentia aliquantulum per diviſionem partium ejus. At poſtquam competentem Fluiditatis gradum acquiſiverit, (qualis forte eſt Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) reſiſtentia in anteriore ſuperficie ſolidi, per ulteriorem partium diviſionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura eſt quam pro limite quem in Corollario ſuperiore aſſignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia ſine ſenſibili motus diminutione longiſſime progrediuntur, non ſolum Fluidiſſima ſunt, ſed etiam longe rariora quam ſunt corpora illa quæ in ipſis moventur: niſi forte quis dixerit Medium omne Fluidiſſimum, impetu perpetuo in poſticam projectilis partem facto, tantum promovere motum ejus quantum impedit & reſiſtit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo veriſimile eſt. Nam & experimentis quibuſdam factis, reperi quod in Fluidis ſatis compreſſis pars aliqua redditur.

Omnem

Omnem vero in caſu quocunque reddi nec rationi conſentaneum videtur, neque cum experimentis hactenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcunque ſubtilium, ſi denſa ſint, vim ad ſolida movenda reſiſtendaque permagnam eſſe, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propoſitiones duas quæ ſequuntur.

Lemnma IV.

Si vas Sphæricum Fluido homogeneo quieſcente plenum a vi impreſſa moveatur in directum, motuque progreſſivo ſemper accelerato ita pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi incluſi, æqualiter participando motum vaſis, quieſcent inter ſe. Idem obtinebit in vaſe figuræ cujuſcunque. Res manifeſta eſt, nec indiget demonſtratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbeſcentis progreditur, & cujus partes inter ſe quieſcunt, rapit omnia ejuſdem denſitatis innatantia corpora, & ſecum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma ſuperius ſi vas Sphæricum, rigidum, Fluidoque homogeneo quieſcente plenum, motu paulatim impreſſo progrediatur; Fluidi motum vaſis participantis partis omnes ſemper quieſcent inter ſe. Ergo ſi Fluidi partes aliquæ congelarentur, pergerent hæ quieſcere inter partes reliquas. Nam quoniam partes omnes quieſcunt inter ſe, perinde eſt ſive fluidæ ſint, ſive aliquæ earum rigeſcant. Ergo ſi vas a vi aliqua extrinſecus impreſſa moveatur, & motum ſuum imprimat in Fluidum: Fluidum quoque motum ſuum imprimet in ſui ipſius partes congelatas eaſque ſecum rapiet. Sed partes illæ congelatæ ſunt corpora ſolida ejuſdem denſitates cum Fluido; & par eſt ratio Fluidi, ſive id in vaſe moto claudatur, ſive in ſpatiis liberis ad modum venti

ſpiret. Ergo Fluidum omne quod motu progreſſivo accelerato fertur, & cujus partes inter ſe quieſcunt, ſolida quæcunque ejuſdem denſitatis incluſa, quæ ſub initio quieſcebant, rapit ſecum, & una moveri cogit. *Q. E. D.*

Prop. XL. Prob. X.

Invenire reſiſtentiam ſolidorum Sphæricorum in Mediis Fluidiſſimis denſitate datis.

In Fluido quocunque dato inveniatur reſiſtentia ultima ſolidi ſpecie dati, cujus magnitudo in infinitum augetur. Dein dic: ut ejus motus amiſſus, quo tempore progrediendo longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribit, eſt ad ejus motum totum ſub initio, ita motus quem ſolidum quodvis datum, in Fluido eodem jam facto ſubtiliſſimo, deſcribendo diametri ſuæ longitudinem amitteret, eſt ad ejus motum totum ſub initio quamproxime. Nam ſi particulæ minimæ Fluidi ſubtiliati eandem habeant proportionem eundemque ſitum ad ſolidum datum in eo movens, quem particulæ totidem minimæ Fluidi non ſubtiliati habent ad ſolidum auctum; ſintque particulæ Fluidi utriuſq; ſumme lubricæ, & viribus centrifugis centripetiſque omnino deſtituantur; incipiant autem ſolida temporibus quibuſcunque proportionalibus in his Fluidis ſimiliter moveri: pergent eadem ſimiliter moveri, adeoque quo tempore deſcribunt ſpatia ſemidiametris ſuis æqualia, amittent partes motuum proportionales totis; idque licet partes Medii ſubtiliati minuantur, & magnitudo ſolidi in Medio non ſubtiliato moventis augeatur in infinitum. Ergo ex reſiſtentia ſolidi aucti in Medio non ſubtiliato, dabitur per proportionem ſuperiorem reſiſtentia ſolidi non aucti in Medio ſubtiliato. *Q. E. I.*

Si particulæ non ſunt ſumme lubricæ, ſupponendum eſt quod in utroq; Fluido ſunt æqualiter lubricæ, eo ut ex defectu lubricitatis reſiſtentia utrinq; æqualiter augeatur: & Propoſitio etiamnum valebit.

Corol. 1.

Corol. 1. Ergo si ex aucta solidi Sphærici magnitudine augeatur ejus resistentia in ratione duplicata; resistentia solidi Sphærici dati ex diminuta magnitudine particularum Fluidi, nullatenus minuetur.

Corol. 2. Sin resistentia, augendo solidum Sphæricum, augeatur in minore quam duplicata ratione diametri: eadem diminuendo particulas Fluidi, diminuetur in ratione qua resistentia aucta deficit a ratione duplicata diametri.

Corol. 3. Unde perspicuum est quod solidi dati resistentia per divisionem partium Fluidi non multum diminui potest. Nam resistentia solidi aucti debebit esse quam proxime ut quantitas materiæ fluidæ resistentis, quam solidum illud movendo protrudit & a locis a se invasis & occupatis propellit: hoc est ut spatium Cylindricum per quod solidum movetur, adeoque in duplicata ratione semidiametri solidi quamproxime.

Corol. 4. Igitur propositis duobus Fluidis, quorum alterum ab altero quoad vim resistendi longissime superatur: Fluidum quod minus resistit est altero rarius; suntque Fluidorum omnium vires resistendi prope ut eorum densitates; præsertim si solidæ sint magna, & velociter moveantur, & Fluidorum æqualis sit compressio.

Scholium Generale.

Quæ hactenus demonstrata sunt tentavi in hunc modum. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{1}{22}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus quartam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad di-

ſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor, amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121; ita ut aſcenſu ultimo deſcribaret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor, amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque; & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$ $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime; in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi. Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quamproxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propoſitionis xxxii. demonſtratum eſt.

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Et cum velocitates maximæ in prædictis ſex Caſibus, ſint ut arcuum dimidiorum $1\frac{7}{8}$, $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 chordæ, atque adeo ut arcus ipſi quamproxime, hoc eſt ut numeri $1\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16: ſcribamus in Caſu ſecundo quarto & ſexto numeros 1, 4, & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{242}$ æqualis $A + B + C$ in Caſu ſecundo; & $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ æqualis $4A + 8B + 16C$

in

in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ æqualis $16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Unde ſi per has æquationes determinemus quantitates A, B, C; habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Cæterum cum velocitates maximæ ſint in Cycloide ut arcus oſcillando deſcripti, in circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo ſint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca: ut ex reſiſtentia in circulo inveniatur reſiſtentia in Trochoide, debebit reſiſtentia augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (ſeu durationem reſiſtentiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id eſt (ſi rationes conjungamus) debebit reſiſtentia augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in caſu ſecundo eſt 6283 ad 6279, in quarto 12566 ad 12533, in ſexto 25132 ad 24869. Et inde reſiſtentia $\frac{1}{242}$, $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$, & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ evadunt $\frac{6283}{6279 \times 242}$, $\frac{25132}{12533 \times 35\frac{1}{2}}$ & $\frac{201056}{24869 \times 9\frac{2}{3}}$, id eſt in numeris decimalibus 0,004135, 0,056486 & 0,8363. Unde prodeunt æquationes $A + B + C = 0,004135$: $4A + 8B + 16C = 0,05648$ & $16A + 64B + 256C = 0,8363$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A = 0,0002097$, $B = 0,0008955$ & $C = 0,0030293$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0,0002097V + 0,0008955V^{\frac{2}{3}} + 0,0030298V^2$: & propterea cum per Corol. Prop. xxx. reſiſtentia Globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0001334V + 0,000623V^{\frac{3}{2}} + 0,0227235V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam, id eſt ad 121 digitos. Unde cum V in caſu

casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut 0. 003029 ad 121, in quarto ut 0. 042875 ad 121, in sexto ut 0. 63013 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in Casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\ \frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima ob resistentiam Aeris non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$; idque in Cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius Sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Unde cum corpus tempore minuti unius secundi cadendo (uti per experimenta pendulorum determinavit *Hugenius*) describat pedes *Parisienses* $15\frac{1}{12}$, id est pedes *Anglicos* $16\frac{11}{24}$ seu digitos $197\frac{1}{2}$, & tempora sint in dimidiata ratione spatiorum; Globus tempore minut. 16tert. 38quart. cadendo describet 15, 278 digitos, & velocitatem suam prædictam acquiret; & propterea cum eadem velocitate uniformiter continuata describet eodem tempore longitudinem duplam 30, 556 digitorum. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 63013 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0, 58172 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus

hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus ut 0, 58172 ad 213, 4, id est ut 1 ad $366\frac{5}{6}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem pedum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $366\frac{5}{6}$, hoc est velocitatis totius partem $\frac{1}{366\frac{5}{6}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ seu digitorum $31\frac{7}{6}$ describere poset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{32621}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descensus Primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Num. Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum duorum & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, suspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum

oscillatio-

oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione prima $\frac{2}{193} = A+B+C$, in ſecunda $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A+8B+16C$, in tertia $\frac{8}{310}$ æqu. $16A+64B+256C$. Quæ æquationes per reductiones ſuperius expoſitas dant, $A = 0,000145$, $B = 0,000247$ & $C = 0,0009$. Et inde prodit reſiſtentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,000923V + 0,000172V^{\frac{3}{2}} + 0,000675V^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0,000675V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0,00227235V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0,00227235$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0,000675$, id eſt ut 130309 ad 17719 ſeu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ

Globorum

Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli, & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quamproxime in dimidiata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, id eſt 7 ad $\frac{3}{2}$ ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{3}{4}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a Nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$, oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$, velocitas ejus diminueretur in ratione illa dimidiata; & arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475 diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet 0,4412. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $67\frac{1}{3}$ ad $124\frac{3}{11}$, differentia iſta 0,4412 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,569. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{11}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcu-

 um

um deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1, 509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 313, 9. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $\frac{25}{29}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{2}{22}$, producit 48, 55. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 313,9 & 48,55. Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,58172 ad 0,63013, id eſt ut 44,4 ad 48,55; & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti, adeoque partes illæ ſunt ut 313,9 & 44,4 quamproxime, id eſt ut 7,07 ad 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{1}{2}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt ut Globorum reſiſtentiæ 7,07 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt (paribus Globis) ut quadrata velocitatum, ſunt etiam (paribus velocitatibus) ut quadrata diametrorum Globorum; & propterea (per Corollaria Prop. XL. Libri hujus) reſiſtentia quam Globi majores & velociores in aere movendo ſentiunt, haud multum per infinitam aeris diviſionem & ſubtiliationem diminui poteſt, proindeque Media omnia in quibus corpora multo minus reſiſtuntur, ſunt aere rariora.

Cæterum Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque (cum demonſtratio vacui ex his dependeat) ut experimenta

perimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus digitorum.	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus digitorum.	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus oſcillationum in aqua.			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{8}{3}$
Numerus oſcillationum in aere.	$35\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amiſſi ſunt. Erant autem oſcillationes in aere paulo celeriores quam in aqua, nimirum in ratione 44 ad 41. Nam $14\frac{2}{3}$ oſcillationes in aqua, & $13\frac{2}{3}$ in aere ſimul peragebantur. Et propterea ſi oſcillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, numerus oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur (ob reſiſtentiam auctam in ratione illa duplicata & tempus diminutum in ratione eadem ſimplici)

plici) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet $1\frac{1}{5}$ in $\frac{41}{44}$ seu $\frac{123}{110}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $\frac{123}{110}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $\frac{123}{110}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in Casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV+CV^2$ resistentiam Globi in aere cum velocitate V moventis,. & cum velocitas maxima, in Casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ ut 1 ad 8, & resistentia in Casu columnæ quartæ ad resistentiam in Casu columnæ primæ in ratione arcuum differentiæ in his casibus, ad numeros oscillationum applicatæ, id est ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his Casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro resistentiis, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ seu $A+8C=535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{2}{7}$; atque adeo resistentia ut $21\frac{2}{7}V+64\frac{3}{14}V^2$ quamproxime. Quare in Casu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21\frac{2}{7}+64\frac{3}{14}$ seu $85\frac{1}{2}$, ad $64\frac{3}{14}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $85\frac{1}{2}$ ad $64\frac{3}{14}$ & 535 ad $\frac{123}{110}$ conjunctim, id est ut 637 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum

rum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequente deſcribitur.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus.	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proportionalis	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{3}$

Reſiſtentia hic nunquam augetur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Et idem in pendulo majore evenire veriſimile eſt, ſi modo Arca augeatur in ratione penduli. Debebit tamen reſiſtentia tam in aere quam in aqua, ſi velocitas per gradus in infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo pluſquam duplicata, propterea quod in experimentis hic deſcriptis reſiſtentia minor eſt quam pro ratione de corporibus velociſſimis in Libri hujus Prop. xxxvi & xxxviii. demonſtrata. Nam corpora longe velociſſima ſpatium a tergo relinquent vacuum, ideoque reſiſtentia quam ſentiunt in partibus præcedentibus, nullatenus minuetur per preſſionem Medii in partibus poſticis.

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia

pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quamproxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora pari denſitate proculdubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in aqua ſeu dulci ſeu falſa, in Spiritibus vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fœcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam Fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo reſiſtentiam patiatur qua motus ſui pars $\frac{1}{3261}$, interea dum longitudinem ſemidiametri

ametri ſuæ deſcribat (ut jam ante oſtenſum eſt) tollatur, ſitque denſitas aeris ad denſitatem aquæ ut 800 vel 850 ad 1 circiter, conſequens eſt ut hæc Regula generaliter obtineat. Si corpus quodlibet Sphæricum in Medio quocunque ſatis Fluido moveatur, & ſpectetur reſiſtentiæ pars illa ſola quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc pars erit ad vim quæ totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudinem duarum ipſius ſemidiametrorum motu illo uniformiter continuato deſcribat, vel tollere poſſet vel eundem generare, ut denſitas Medii ad denſitatem corporis quamproxime. Igitur reſiſtentia quaſi triplo major eſt quam pro lege in Corollario primo Propoſitionis xxxviii. allata ; & propterea partes quaſi duæ tertiæ motus illius omnis quem Globi partes anticæ movendo imprimunt in Medium, reſtituuntur in Globi partes poſticas a Medio in orbem redeunte, inque ſpatium irruente quod Globus alias vacuum poſt ſe relinqueret. Unde ſi velocitas Globi eouſque augeatur ut Medium non poſſet adeo celeriter in ſpatium illud irruere, quin aliquid vacui a tergo Globi ſemper relinquatur, reſiſtentia tandem evadet quaſi triplo major quam pro Regula generali noviſſime poſita.

Hactenus experimentis uſi ſumus oſcillantium pendulorum, eo quod eorum motus facilius & accuratius obſervari & menſurari poſſint. Motus autem pendulorum in gyrum actorum & in orbem redeundo circulos deſcribentium, propterea quod ſint uniformes & eo nomine ad inveſtigandam reſiſtentiam datæ velocitati competentem longe aptiores videantur, in conſilium etiam adhibui. Faciendo enim ut pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos prima & ultima revolutione deſcripſit. Et inde collegi velocitates corporis ſub initio & fine. Tum dicendo quod corpus, velocitate mediocri deſcribendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi reſiſtentiam qua differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti poſſet ; & reſiſtentia inventa, quanquam hujus generis experimenta

menta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum præcedentibus congruebat.

Denique cum receptiſſima Philoſophorum ætatis hujus opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante Pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget.) Huic ponderi addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis Metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam

bam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum diſtracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacui, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque adeo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur *A* reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & *B* reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quæ reſiſtuntur: erit 78 *B* reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam $A+78B$ ut 77 ad 78, & diviſim $A+B$ ad $77B$ ut 77, ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ oriatur ab actione Fluidi alicujus ſubtilis in Metallum incluſum. At cauſam longe aliam eſſe opinor. Nam tempora oſcillationum pyxidis plenæ minora ſunt quam tempora oſcillationum pyxidis vacuæ, & propterea reſiſtentia pyxidis plenæ in externa ſuperficie major eſt, pro ipſius velocitate & longitudine ſpatii oſcillando deſcripti, quam ea pyxidis vacuæ. Quod cum ita ſit, reſiſtentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane inſenſibilis.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

Eadem methodo qua invenimus reſiſtentiam corporum Sphæricorum in Aqua & argento vivo, inveniri poteſt reſiſtentia corporum figurarum aliarum ; & ſic Navium figuræ variæ in Typis exiguis conſtructæ inter ſe conferri, ut quænam ad navigandum aptiſſimæ ſint, ſumptibus parvis tentetur.

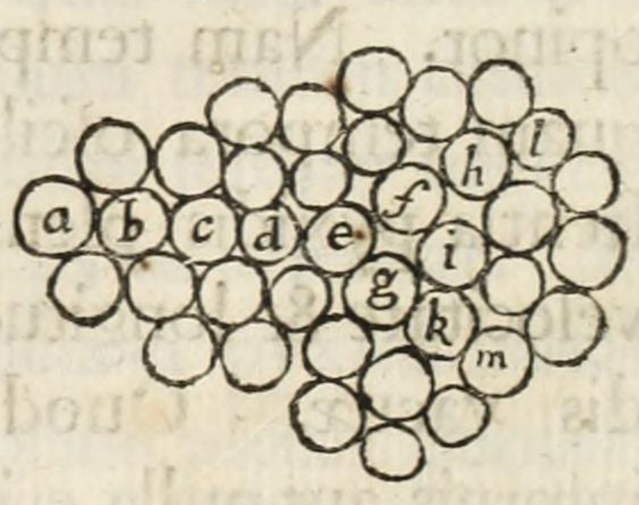
SECT. VIII.

De Motu per Fluida propagato.

Prop. XLI. Theor. XXXI.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

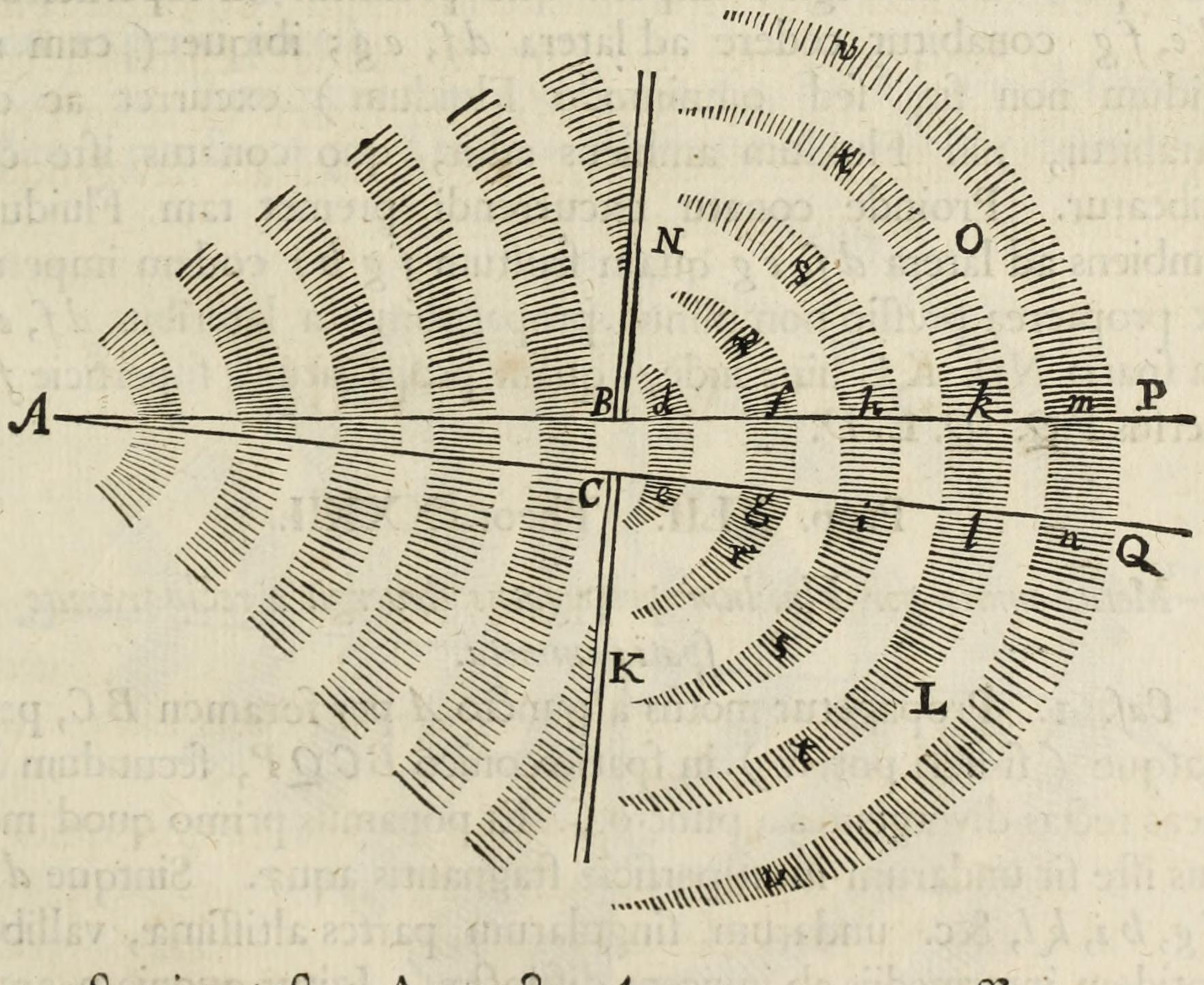
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e* ; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes ; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulcian-



tur

tur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*

Corol. Si preſſionis a dato puncto per Fluidum propagatæ pars aliqua obſtaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam



demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *N B C K* perforato in *B C*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *A P Q*, quæ per foramen circulare *B C* tranſit. Planis tranſverſis *d e*, *f g*, *h i* diſtinguatur conus *A P Q* in fruſta

& interea dum conus *A B C*, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *d e g f* in ſuperficie *d e*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *f g i h* in ſuperficie *f g*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus Legem tertiam) quod fruſtum primum *d e f g*, reactione fruſti ſecundi *f g h i*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *f g*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *d e g f* inter Conum *A d e* & fruſtum *f h i g* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *d e*, *f g* conabitur cedere ad latera *d f*, *e g*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *d f*, *e g* quam fruſtum *f g h i* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *d f*, *e g* in ſpatia *N O*, *K L* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *f g* verſus *P Q*. *Q. E. D.*

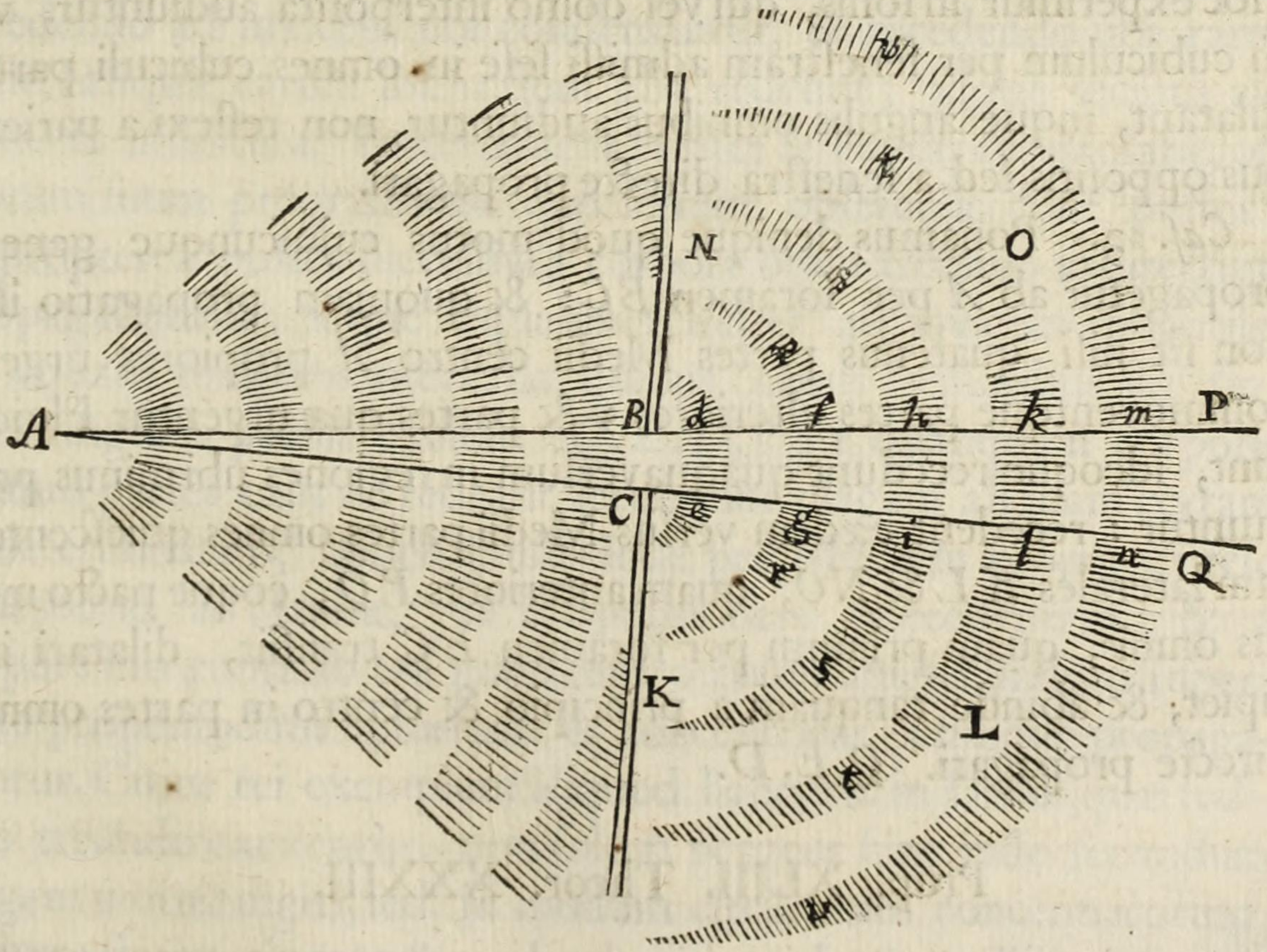
Prop. XLII. Theor. XXXII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *B C*, pergatque (ſi fieri poteſt) in ſpatio conico *B C Q P*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *d e*, *f g*, *h i*, *k l*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in Fluidi partibus immotis *L K*, *N O*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *K L* & *N O*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in Fluidi partibus immotis *K L*, *N O*; defluet eadem

eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *K L* & *N O*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *P Q* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *K L* & *N O* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *K L* & *N O*, eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *P Q* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *K L* & *N O* ab undis dilatatis *r f g r*, *s h i s*, *t k l t*, *v m n v*, &c occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod *d e*, *f g*, *h i*, *k l*, *m n* designent pulsus a puncto *A* per Medium Elasticum successive propagatos.



Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima Sphæricam

occupet

occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoq; pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q.E.D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel domo interpoſita audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non reflexi a parietibus oppoſitis ſed a feneſtra directe propagati.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit niſi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur Fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet, & abinde tanquam a principio & centro in partes omnes directe propagari. *Q.E.D.*

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in Medio vero non Elaſtico motum circularem excitabit. *Caſ.* 1.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt ; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli : & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur,ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt ; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus ; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur ; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. *Q. E. D.* Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem ; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum Sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis,quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

Quod ſi Medium non ſit Elaſticum : quoniam ejus partes a corporis

poris tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc eſt ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum, ſed in circulum eundo pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quæ corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficietur ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

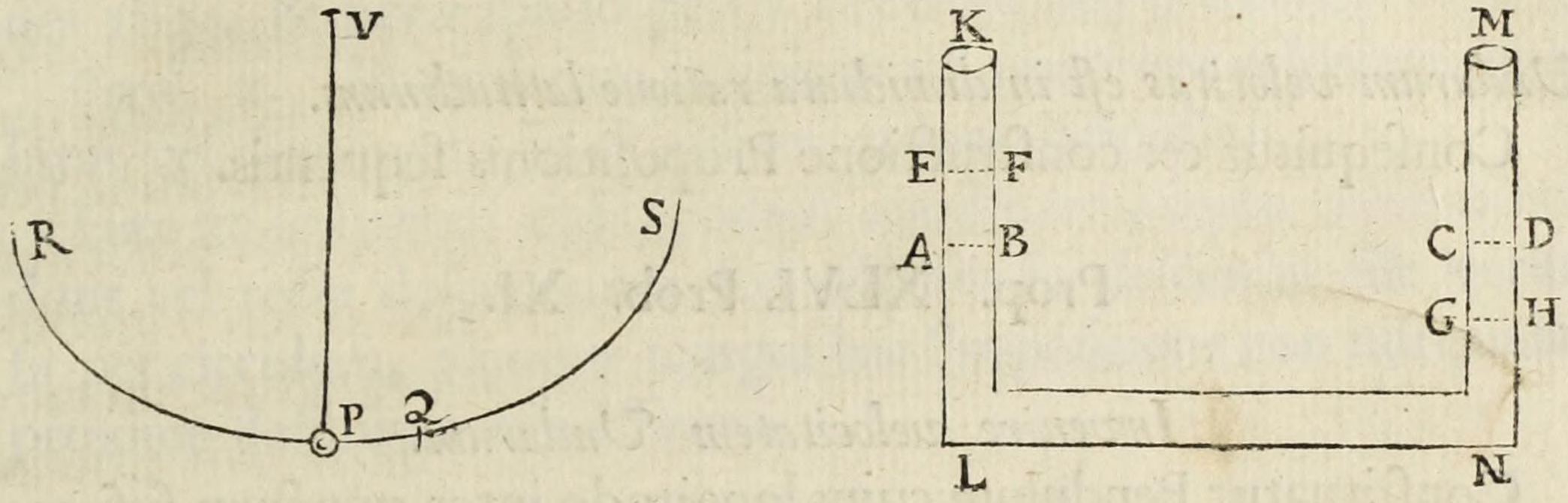
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem per Medium ambiens ſecundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium flammæ ſed a totius dilatatione derivari.

Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

Si Aqua in canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando. Deſignent igitur *A B*, *C D* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure *K L* aſcendit ad altitudinem *E F*, deſcenderit aqua in crure *M N* ad altitudinem *G H*. Sit autem *P* corpus pendulum,

pendulum, *V P* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *S P Q R* Cycloidis quam Pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *P Q* arcus altitudini *A E* æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus



acceleratur & retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure *K L* aſcendit ad *EF*, & in crure altero deſcendit ad *G H*, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ *E A B F*, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut *A E* ſeu *P Q* ad *V P* ſeu *P R*. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in Cycloide, eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia *P Q* a loco infimo *P*, ad Cycloidis longitudinem *P R*. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia *A E*, *P Q* deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque vires illæ, ſi aqua & pendulum in principio, æquali cum velocitate moveantur; pergent eadem temporibus æqualiter movere, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$, aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas eſt in dimidiata ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam quæ vel vallibus imis vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem, ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc infimæ ſunt, mox fiant altiſſimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E*, & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini, partes altiſſimæ *A*, *C*, *E* tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum Undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt Unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt,

adeoque

adeoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quam proxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in dimidiata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propoſitione non niſi quamproxime definitum eſſe affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſita ex dimidiata ratione vis Elaſticæ directe & dimidiata ratione denſitatis inverſe; ſi modo Fluidi vis Elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verum tamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro Phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires Elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes, itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt,& in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione dimidiata materiæ & ratione dimidiata ſpatii, atque adeo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

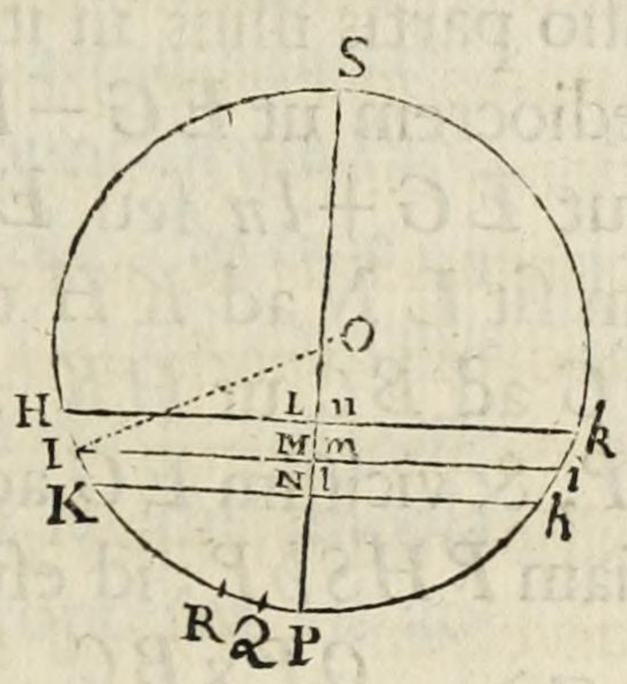
Caſ. 3. In Mediis igitur denſitate & vi elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi Medii vel denſitas vel vis Elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in dimidiata ratione denſitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione dimidiata denſitatis Medii inverſe & ratione dimidiata vis Elaſticæ directe. *Q. E. D.*

Prop. XLVIII. Theor. XXXVII.

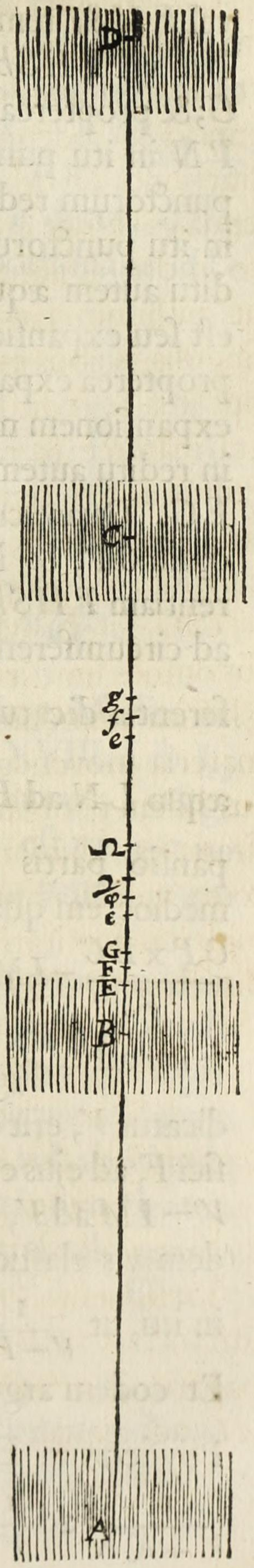
Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

Deſignent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; *ABC* plagam motus pulſuum ab *A* verſus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria Phyſica Medii quieſcentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem diſtantias ſita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, ſpatia æqualia

æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSb*, ſi demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Ee* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Phyſicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E* eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E* iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus, vibrationes ſingulas peraget cum oſcillante Pendulo. Probandum eſt quod ſingula Medii puncta Phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a cauſa quacunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

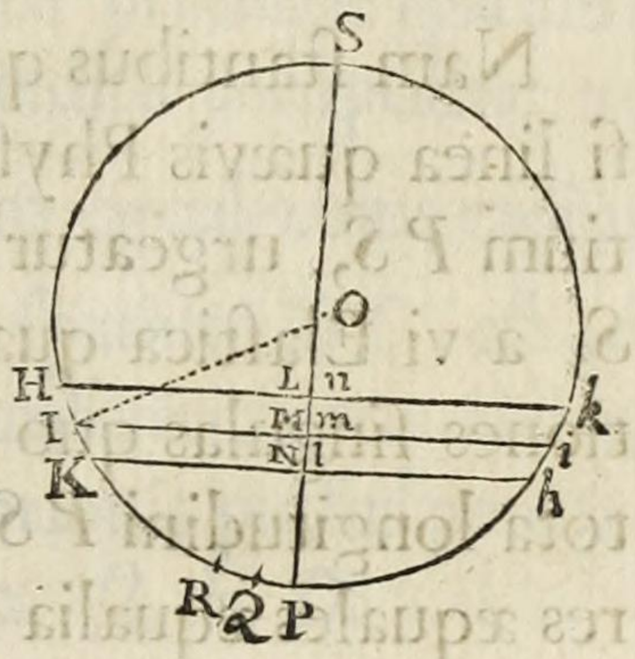


In circumferentia *PHSb* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulſuum intervallum totum *BC*. Et demiſſis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, ſi *PH* vel *PHSk* ſit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel



vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSb$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea E_ε, F_φ, G_γ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipsis Pn, Pm, Pl in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\varepsilon\gamma$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii EG in loco $\varepsilon\gamma$, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut $EG - LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG + LN$ ad EG. Quare cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP, & EG ad BC ut HK ad circumferentiam $PHSbP$, & vicissim EG ad HK ut BC ad circumferentiam $PHSbP$; id est (si circumferentia dicatur Z) ut $\frac{OP \times BC}{Z}$ ad OP, & ex æquo LN ad EG ut IM ad $\frac{OP \times BC}{Z}$: erit expansio partis EG in loco $\varepsilon\gamma$ ad expansionem mediocrem quam habet in loco suo primo EG, ut $\frac{OP \times BC}{Z} - IM$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in itu, utque $\frac{OP \times BC}{Z} + im$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in reditu. Unde si $\frac{OP \times BC}{Z}$ dicatur V, erit expansio partis EG, punctive Physici F, ad ejus expansionem mediocrem in itu, ut $V - IM$ ad V, in reditu ut $V + im$ ad V; & ejusdem vis elastica ad vim suam elasticam mediocrem in itu, ut $\frac{I}{V - IM}$ ad $\frac{I}{V}$; in reditu ut $\frac{I}{V + im}$ ad $\frac{I}{V}$. Et eodem argumento vires Elasticæ punctorum Physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{I}{V - HL}$ & $\frac{I}{V - KN}$ ad $\frac{I}{V}$; & virium differentia ad Medii vim

vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt (ſi ob brevitatem pulſuum ſupponamus HK & KN indefinite minores eſſe quantitate V) ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium Elaſticarum punctorum Phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id eſt exceſſus vis Elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut ipſius diſtantia a Medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*



Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri

ſtri comprimi, ſitque *A* altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit *A*: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio *A* deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione ſuperiore conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica, *E F* ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *P S*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus Perimeter tota longitudini *P S* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in dimidiata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt *A*, in dimidiata ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *P S* ſeu *P O* ad longitudinem *A*. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica *E G*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis ſuperioris) ad ejus vim totam Elaſticam ut *H L* − *K N* ad *V*, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut *H K* ad *V*: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, qua lineola *E G* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo *A* ad lineolæ longitudinem *E G*; adeoque ex æquo, vis qua lineola *E G* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut *H K* x *A* ad *V* x *E G*. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in dimidiata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in dimidiata ratione *V* x *E G* ad *H K* x *A*, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt *A*, in dimidiata ratione *V* x *E G* ad *H K* x *A* & *P O* ad *A* conjunctim;

id

id est (cùm fuerit, in superiore Propositione, V æqualis $\frac{PO \times BC}{Z}$, & HK æqualis $\frac{EG \times Z}{BC}$) in dimidiata ratione $\frac{PO\,qu. \times BC \times EG}{Z}$ ad $\frac{EG \times Z \times A\,qu.}{BC}$ seu $PO\,qu. \times BC\,qu.$ ad $Z\,qu. \times A\,qu.$ hoc est in ratione $PO \times BC$ ad $Z \times A$, seu BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$, id est ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium BC, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola (per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quàm aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modò vehementes sint & gra-

ves, quales ſunt ſoni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatur etiam ex velocitate ſonorum. Nam cùm pondera ſpecifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi *Mercurius* in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum Aeris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 850 circiter: erunt pondera ſpecifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11617. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 348500 digitorum ſeu pedum *Anglicorum* 29042. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris Problematis nominavimus *A*. Circuli radio 29042 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 182476. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum, oſcillationem ex itu & reditu compoſitam, tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, abſolvat; pendulum pedes 29042, ſeu digitos 348500, longum, oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $188\frac{4}{7}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo conficiet pedes 182476, adeoque tempore minuti unius ſecundi pedes 968. Scribit *Merſennus*, in Baliſticæ ſuæ Prop. XXXV. ſe factis experimentis inveniſſe quod ſonus minutis quinque ſecundis hexapedas *Gallicas* 1150 (id eſt pedes *Gallicos* 6900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* ſit ad *Anglicum* ut 1068 ad 1000, debebit ſonus tempore minuti unius ſecundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Merſennus Robervallum* Geometram clariſſimum in Obſidione *Theodonis* obſervaſſe tormentorum fragorem exauditum eſſe poſt 13 vel 14 ab igne viſo minuta ſecunda, cùm tamen vix dimidiam *Leucam* ab illis Tormentis abfuerit. Continet *Leuca Gallica* hexapedas 2500, adeoque ſonus tempore 13 vel 14 ſecundorum, ex Obſervatione *Robervalli*, confecit pedes *Pariſienſes* 7500, ac tempore minuti unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 560, *Anglicos* verò

verò 600 circiter. Multum differunt hæ Obſervationes ab invicem, & computus noſter medium locum tenet. In porticu Collegii noſtri pedes 208 longa, ſonus in termino alterutro excitatus quaterno recurſu Echo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod ſingulis ſoni recurſibus pendulum quaſi ſex vel ſeptem digitorum longitudinis oſcillabatur, ad priorem ſoni recurſum eundo & ad poſteriorem redeundo. Longitudinem penduli ſatis accuratè definire nequibam: ſed longitudine quatuor digitorum, oſcillationes nimis celeres eſſe, ea novem digitorum nimis tardas judicabam. Unde ſonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quàm pendulum digitorum novem, & majore quàm pendulum digitorum quatuor oſcillatur; id eſt minore tempore quàm $28\frac{3}{4}$ minutorum tertiorum, & majore quàm $19\frac{1}{6}$; & propterea tempore minuti unius ſecundi conficit pedes *Anglicos* plures quàm 866 & pauciores quàm 1272, atque adeò velocior eſt quàm pro Obſervatione *Robervalli*, ac tardior quàm pro Obſervatione *Merſenni*. Quinetiam accuratioribus poſtea Obſervationibus definivi quod longitudo penduli major eſſe deberet quàm digitorum quinque cum ſemiſſe, & minor quàm digitorum octo; adeoque quòd ſonus tempore minuti unius ſecundi confecit pedes *Anglicos* plures quàm 920 & pauciores quàm 1085. Igitur motus ſonorum, ſecundum calculum Geometricum ſuperius allatum, inter hos limites conſiſtens, quadrat cum Phænomenis, quatenus hactenus tentare licuit. Proinde cùm motus iſte pendeat ab aeris totius denſitate, conſequens eſt quod ſoni non in motu ætheris vel aeris cujuſdam ſubtilioris, ſed in aeris totius agitatione conſiſtat.

Refragari videntur experimenta quædam de ſono in vaſis aere vacuis propagato, ſed vaſa aere omni evacuari vix poſſunt; & ubi ſatis evacuantur ſoni notabiliter imminui ſolent; *Ex. gr.* Si aeris totius pars tantùm centeſima in vaſe maneat, debebit ſonus eſſe centuplo languidior, atque adeò non minus audiri quàm ſi quis ſonum eundem in aere libero excitatum audiendo, ſubinde ad decu-

plam distantiam à corpore sonoro recederet. Conferenda sunt igitur corpora duo æqualiter sonora,quorum alterum in vase evacuato, alterum in aere libero consistat, & quorum distantiæ ab auditore sint in dimidiata ratione densitatum aeris: & si sonus corporis prioris non superat sonum posterioris objectio cessabit.

Cognita sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Scribit *Mersennus* (Lib. I. Harmonicorum Prop. IV.) se (factis experimentis quibusdam quæ ibidem describit) invenisse quod nervus tensus vicibus 104 recurrit spatio minuti unius secundi, quando facit Unisonum cum organica Fistula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organarii *C fa ut*. Sunt igitur pulsus 104 in spatio pedum 968,quos sonus tempore minuti secundi describit: adeoque pulsus unus occupat spatium pedum $9\frac{1}{4}$ circiter; id est duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quòd latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porrò cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutiùs audiuntur ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quàm cum proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVIII. Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis Stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impedientibus tardiùs amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT.

SECT. IX.

De motu Circulari Fluidorum.

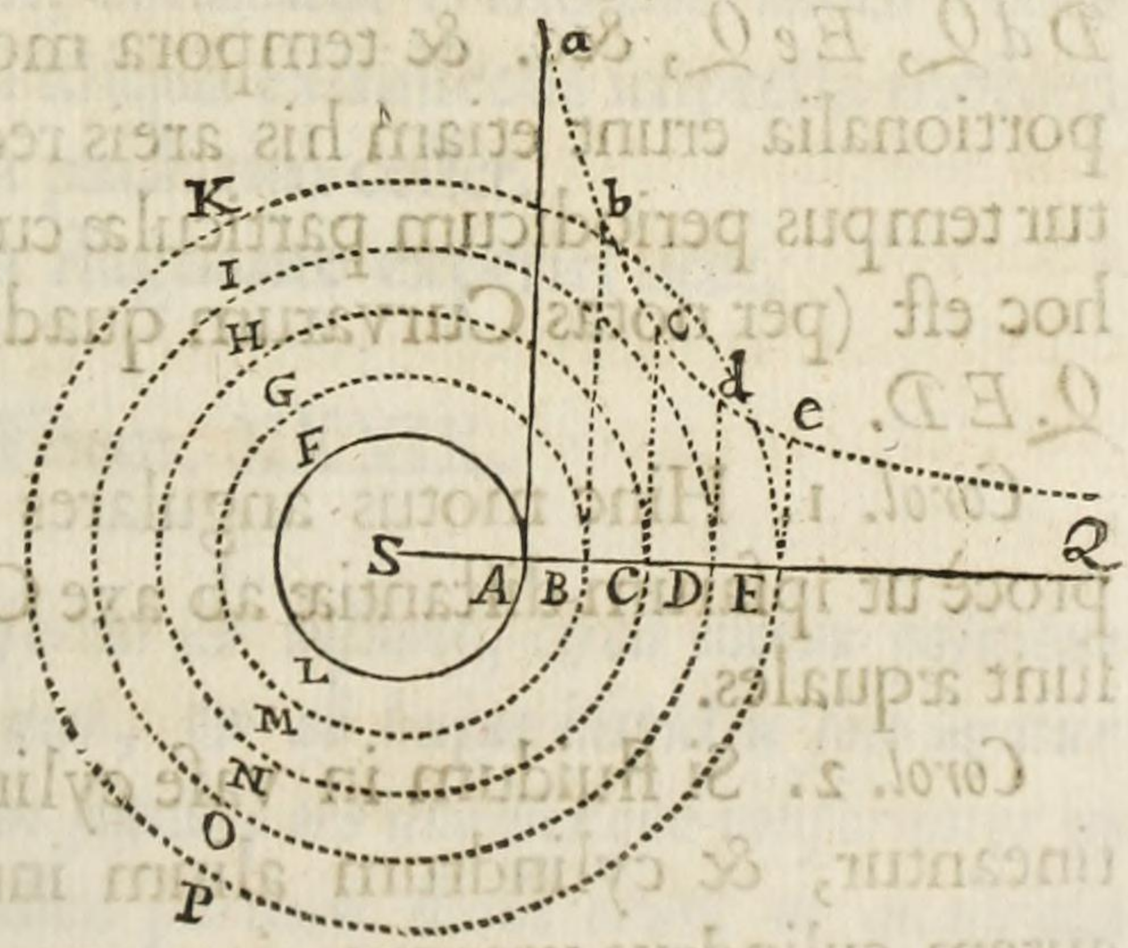
Hypotheſis.

REſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes Fluidi ſeparantur ab invicem.

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in Orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuò factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major



eſt

eſt vel minor, ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impreſſio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit prout in eandem regionem cum ipſius motu,vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut quadrata diſtantiarum inversè. Quare ſi ad infinitæ rectæ *S A B C D E Q* partes ſingulas erigantur perpendicula *A a*, *B b*, *C c*, *D d*, *E e*, &c. ipſarum *S A*, *S B*, *S C*, *S D*, *S E*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt ſummæ diſtantiarum, hoc eſt motus toti angulares,ut reſpondentes ſummæ linearum *A a*, *B b*, *C c*, *D d*, *E e*: id eſt,ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum,ut areæ Hyperbolicæ his ſummis Analogæ *A a Q*, *B b Q*, *C c Q*, *D d Q*, *E e Q*, &c. & tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciprocè ut area *D d Q*, hoc eſt (per notas Curvarum quadraturas) directè ut diſtantia *S D*. *Q. E D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineantur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum. *Co-*

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quàm fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecùs impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aqua profunda stagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

Si Sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæræ. Fig. Prop. LI.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur

guatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos ; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuò factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem ; erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt inversè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè ; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut cubi diſtantiarum inversè. Quare ſi ad rectæ infinitæ $S\,A\,B\,C\,D\,E\,Q$ partes ſingulas erigantur perpendicula $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$, $D\,d$, $E\,e$, &c. ipſarum $S\,A$, $S\,B$, $S\,C$, $S\,D$, $S\,E$, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt ſummæ diſtantiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$, $D\,d$, $E\,e$: id eſt (ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his ſummis analogæ $A\,a\,Q$, $B\,b\,Q$, $C\,c\,Q$, $D\,d\,Q$, $E\,e\,Q$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis $D\,I\,0$ reciprocè ut area $D\,d\,Q$, hoc eſt, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum diſtantiæ $S\,D$. Id quod volui primò demonſtrare.

Caſ. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuò ſuperantes ; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos

nulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectà pergens movebitur pro lege caſus primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus eſt, neque adeò motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter diſtant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta polos quàm juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundo demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut priùs. His ſectionibus annuli omnes quamminimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major ſit ad Eclipticam quàm ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe qua particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur, ne materia quæ ad Eclipticam eſt recedat ſemper à centro & per exteriora Vorticis migret ad polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates

abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis ea actione perpetuò communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui planè invariatam; patet quod motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum à quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Abſque tali principio neceſſe eſt ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latiùs ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuò ob motum

tum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, languescerent paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuò paulatim excurrent; globiq; per actiones vorticum in se mutuò, perpetuò movebuntur de locis suis; uti in Lemmate superiore expositum est; neq; certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si Fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintq; eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum à centro vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum inclusum & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone tempus revolutionis hujus eſſe ad ſummam hujus temporis & temporis revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, data cum velocitate quacunq; moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi Syſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neq; prius deſinent fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motus in Corollariis 8. 9 & 10 definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunq; perſeverabit. Deinde verò ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur Syſtema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neq; motus ſuos in ſe mutuò per fluidum propagare prius ceſſabunt, quàm eorum tempora periodica æquantur inter ſe, & Syſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum cir-

circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minùs fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, adeoq; motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit quàm pro ratione ſuperiùs aſſignata. Si figura vaſis non ſit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulò longiùs à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione Phænomena cœleſtia per Vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum à centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utriſque quam accuratiſſimè, quatenus obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoq; ſi Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam

am hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquialteram reduci, niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quàm ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ (niſi graves ſint in centrum) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi Demonſtrationum gratia Hypotheſin talem initio Sectionis hujus propoſuerim ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione quàm ea velocitatis eſt. Quo conceſſo tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi vortices (uti aliquorum eſt opinio) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs uſque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio ſeſquialtera neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaq; Philoſophi quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquialteræ per Vortices explicari poſſit.

Prop. LIII. Theor. XL.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipſius partibus (quoad velocitatem & curſus determinationem) moventur.

Nam ſi vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neq; quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, ſi Vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo vortice, & reſolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, niſi quatenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam

quam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in Fluidum reſolutum fit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proximè ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs ; adeoq; Vorticis vim illam, qua priùs in Orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro & revolvendo deſcribet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

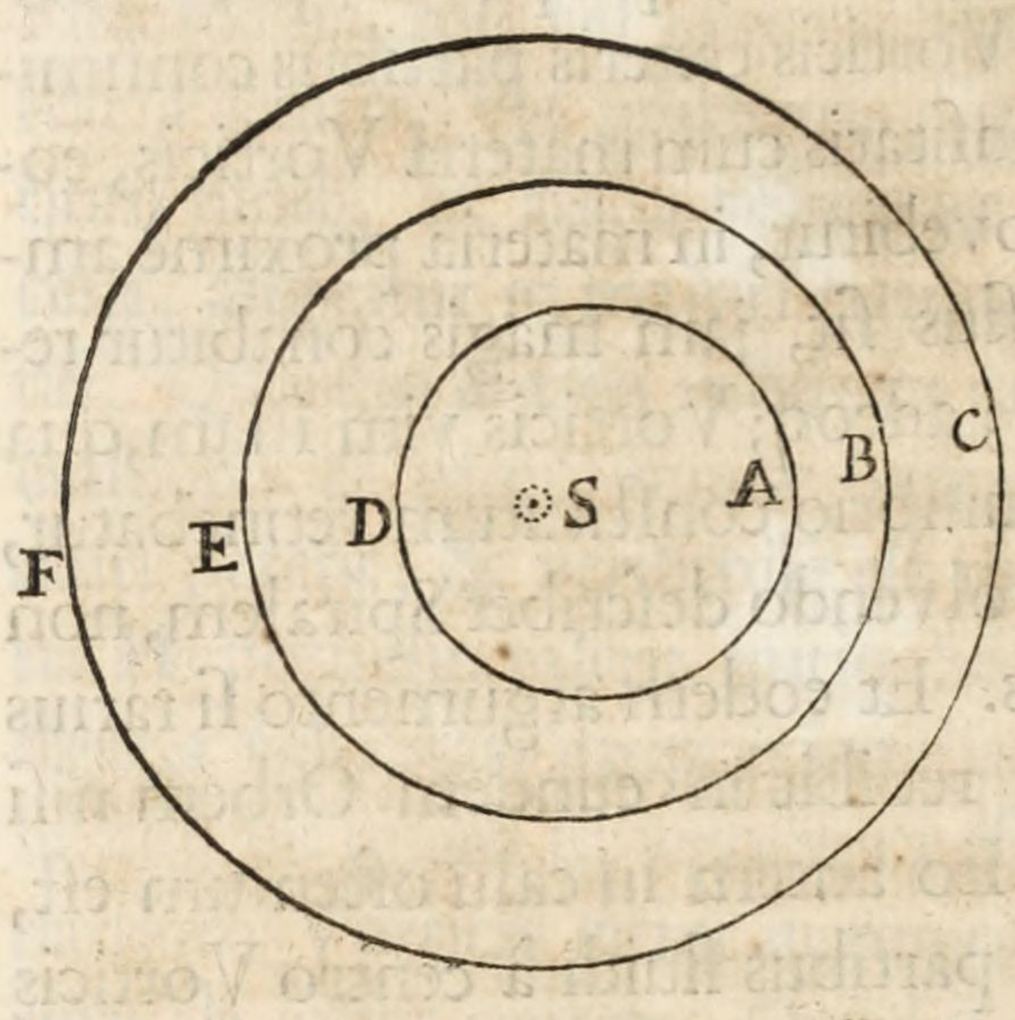
Corol. 1. Ergo ſolidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem ſemper redit, relativè quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ ſecundum Hypotheſin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *A D*, *B E*, *C F*, orbes tres circa Solem *S* deſcriptos, quorum extimus *C F* circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *C F*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *B E*, tardiùs movebitur in Aphelio *B* & velociùs in Perihelio *C*, ſecundum leges Aſtronomicas ; cum tamen ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velociùs moveri

moveri debeat quàm in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic



in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quàm in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relativè quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piſcium. Itaq; Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omninò pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate pleniùs docebitur.

DE

DE

Mundi Systemate

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ij vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent quibus à multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, author esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; sufficerit siquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulò legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & vera ſint & earum Phænomenis explicandis ſufficiunt.*

Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoque effectuum naturalium ejuſdem generis eædem ſunt cauſæ.*

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtia; deſcenſûs lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuſcunque generis corpus transformari poſſe, & qualitatum gradus omnes intermedios ſucceſſivè induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Syſtematis Mundani quieſcere.*

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui Terram alii Solem in centro quieſcere contendant.

Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.*

Conſtat ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ratione ſeſquialtera ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomici: & *Flamſtedius*, qui omnia Micrometro & per Eclipſes Satellitum accuratius definivit, literis ad me datis, quinetiam numeris ſuis mecum communicatis, ſignificavit rationem illam ſeſquialteram tam accuratè obtinere, quàm ſit poſſibile ſenſu deprehendere. Id quod ex Tabula ſequente manifeſtum eſt.

Satellitum

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. 28$'\frac{3}{5}$. 3d. 13h. 17$'\frac{9}{10}$. 7d. 3h. 59$'\frac{3}{5}$. 16d. 18h. 5$'\frac{1}{5}$.

Distantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex Observationibus	1.	2	3	4	
Cassini	5.	8.	13.	23.	Semidiam. Jovis.
Borelli	5 $\frac{2}{3}$.	8 $\frac{2}{3}$.	14.	24 $\frac{2}{3}$.	
Tounlei *per Micromet-*	5,51.	8,78.	13,47.	24,72.	
Flamstedii *per Microm.*	5,31.	8,85.	13,98.	24,23.	
Flamst. *per Eclips. Satel.*	5,578.	8,876.	14,159.	24,903.	
Ex temporibus periodicis.	5,578.	8,878.	14,168.	24,968.	

Hypoth. VI. *Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

Hypoth. VII. *Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquialtera mediocrium distantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemq; orbium dimensiones, sive Planetæ circa Terram, sive iidem circa Solem revolvantur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissimè ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non

differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula ſequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	☿	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes Satellitum Jovis. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

Hypoth. VIII. *Planetas primarios radiis ad Terram ductis areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam reſpectu terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprimè demonſtratur per Eclipſes Satellitum, quibus Eclipſibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

Hypoth. IX. *Lunam radio ad centrum terræ ducto aream tempori proportionalem deſcribere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias Phyſicis in hiſce Hypotheſibus negligo.

Prop.

Prop. I. Theor. I.

Vires, quibus Planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars poſterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejuſdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Hypoth. VIII. & Prop. II. Lib. I. & pars poſterior per Hypoth. VII. & Prop. IV. ejuſdem Libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Coral. I. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim, per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I. quod ſi diſtantia Lunæ à centro Terræ dica-

tur

tur $\mathcal{D}$, vis à qua motus talis oriatur, ſit reciproce ut $\mathcal{D}\ 2\frac{4}{243}$, id eſt reciprocè ut ea ipſius $\mathcal{D}$ dignitas, cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ vicibus $60\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem acceſſus meritò contemnendus eſt. Oritur verò ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Reſtat igitur ut vis illa, quæ ad Terram ſpectat, ſit reciprocè ut $\mathcal{D}^2$; id quod etiam plenius conſtabit, conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à centro Terræ eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Kirchenum* $62\frac{1}{2}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi 61 ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu fixarum completi diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti à Gallis menſurantibus nuper definitum eſt: & ſi Luna motu omni privari fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur

hoc

hoc ex calculo, vel per Propoſitionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inversâ, adeoque ad ſuperficiem Terræ major ſit vicibus 60 x 60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes 60 x 60 x 15 $\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes 15 $\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus noſtris vi gravitatis cadendo deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes Pariſienſes 15 $\frac{1}{12}$, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonſtravit: & propterea vis qua Luna in orbe ſuo retinetur, illa ipſa eſt quam nos gravitatem dicere ſolemus: Nam ſi gravitas ab ea diverſa eſt, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent pedes Pariſienſes 30 $\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypotheſi quod Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: diſtantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60 $\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, & circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris reliquorumque circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Hypoth. II. à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cùm demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis ac Solis, & recedendo

cedendo à Jove & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Corol. 1. Igitur gravitas datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus,eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis eſt in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua ſit, Saturnus viciſſim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento Jupiter in Satellites ſuos omnes, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem,quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri jamdudum obſervarunt alii ; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pixides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aeris reſiſtentiam omnino paria : Et paribus oſcillationibus juxta poſitæ ibant unà & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. & 6.Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum ; hoc

eſt

eſt ut pondus ad pondus. Et ſit in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius,his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ,& una cum Lunâ motu omni privata demitti,ut in Terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia Spatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porrò quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent æqualia Spatia, perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis dimiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porrò Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum,patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol.3. Prop.LXV. Lib.I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materiæ ſuæ quàm cæteri, motus Satellitum (per Corol.2. Prop.LXV. Lib.I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis)Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ,in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione dimidiata quam proximè;uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia

centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quàm distantia centri Jovis à Sole in ratione illa dimidiata. Igitur si in æqualibus à Sole distantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major effet vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quàm distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius, id est parte quinta distantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis excentricitas foret valde sensibilis. Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitis ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia: omninò contra experientiam.

Corol. 2. Igitur corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Nam si æther

aut

aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret, quoniam id non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, (per Hypoth. III.) & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum neceſſariò datur. Nam ſi ſpatia omnia plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt.

Corol. 4. Gravitatem diverſi generis eſſe à vi magnetica. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Eſtque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis: ſed & in eodem corpore intendi poteſt & remitti; in receſſu verò à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ pluſquam duplicata; propterea quod vis longe fortior ſit in contactu, quam cum attrahentia vel minimum ſeparantur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Planetas omnes in ſe mutuò graves eſſe jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque ſeorſim ſpectatum eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde conſequens

eſt, (per Prop. LXIX. Lib.I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porrò cum Planetæ cujuſvis *A* partes omnes graves ſint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis ſit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hac lege gravitare deberent in ſe mutuò, cùm tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: Reſpondeo quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè pro-

proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi tota ex viribus pluribus composita, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio illa in majoribus distantiis satis obtineret, at prope superficiem Planetæ, ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV. Libri primi & ipsius Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies Planetarum aliasve quasvis à centro distantias majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum $224\frac{2}{3}$, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum $16\frac{3}{4}$, Satellitis Hugeniani circa Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circa Terram *27 dier. 7 hor. 43 min.* collatis cum distantia mediocri Veneris à Sole; cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis à Sole distantia juxta observationes *Flamstedii*) est $8'.\ 13''$; cum elongatione maxima Heliocentrica Satellitis Saturnii $3'.\ 20''$; & cum distantia Lunæ à Terra, ex Hypothesi quod Solis parallaxis horizontalis seu semidiameter Terræ è Sole visæ sit quasi $20''$; calculum ineundo inveni quod corporum æqualium & à Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$ & $\frac{1}{28700}$ respectivè. Est autem Solis semidiameter mediocris apparens quasi $16'.\ 6''$. Illam Jovis è Sole visam *Flamstedius*, ex umbræ Jovialis diametro per Eclipses Satellitum inventa, determinavit esse ad elongationem Satellitis extimi ut 1 ad 24,9 adeoque cum elongatio illa sit $8'.\ 13''$ semidiameter Jovis è Sole visi erit $19''\frac{3}{4}$. Diameter Saturni

est

est ad diametrum Annuli ejus ut 4 ad 9, & diameter annuli è Sole visi (mensurante *Flamstedio*) 50″, adeoque semidiameter Saturni è Sole visi 11″. Malim dicere 10″ vel 9″, propterea quod globus Saturni per lucis inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur. Hinc inito calculo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Unde cum pondera æqualium corporum à centris Solis, Jovis, Saturni ac Telluris æqualiter distantium sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$, $\frac{1}{28700}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis diminuuntur vel augentur pondera in duplicata ratione; erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in distantiis 10000, 1063, 889 & 208 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus versantium, ut 10000, $804\frac{1}{2}$, 536 & $805\frac{1}{2}$ respectivè. Pondera corporum in superficie Lunæ ferè duplo minora esse quam pondera corporum in superficie Terræ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in superficiebus Terræ & Planetarum, sunt fere in ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. De Terræ quidem diametro è Sole visa nondum constat. Hanc assumpsi 40″, propterea quod observationes *Kepleri*, *Riccioli* & *Vendelini* non multo majorem esse permittunt; eam *Horroxii* & *Flamstedii* observationes paulo minorem adstruere videntur. Et malui in excessu peccare. Quòd si fortè diameter illa & gravitas in superficie Terræ mediocris sit inter diametros Planetarum & gravitatem in eorum superficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii è Sole visorum diametri sunt 18″, $39\frac{1}{2}$″, 8″, 28″, 20″ circiter, erit diameter Terræ quasi 24″, adeoque Parallaxis Solis quasi 12″, ut *Horroxius* & *Flamstedius* propemodum statuere. Sed diameter paulo major melius congruit cum Regula hujus Corollarii.

Corol. 3. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates illæ sunt ut Planetarum Vires in distantiis à se æqualibus; id est in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1, $\frac{1}{1000}$,

$\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$, $\frac{1}{28700}$ respectivè. Si Parallaxis Solis statuatur minor quàm 20″, debebit quantitas materiæ in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam corporum æqualium & homogeneorum pondera in Sphæras homogeneas in superficiebus Sphærarum, sunt ut Sphærarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1063 & 208, & pondera in eosdem ut 10000, 536, 804$\frac{1}{2}$ & 805$\frac{1}{2}$, & propterea densitates sunt ut 100, 60, 76, 387. Densitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pendet à Parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic rectè definitur. Est igitur Sol paulo densior quàm Jupiter, & Terra multo densior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem densitates inter se fere sunt in ratione composita ex ratione distantiarum à Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ densitates 60, 76, 387 & 700, fere sunt ut distantiarum reciproca $\frac{1}{9538}$, $\frac{1}{5201}$, $\frac{1}{1003}$ & $\frac{1}{1000}$, ducta in radices diametrorum apparentium 18″, 39″$\frac{1}{2}$, 40″, & 11″. Diximus utique, in Corollario secundo, gravitatem ad superficies Planetarum esse quam proximè in ratione dimidiata apparentium diametrorum è Sole visarum; & in Lemmate quarto densitates esse ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras: ideoque densitates fere sunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc est reciproce ut distantiæ Planetarum à Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diversis distantiis à Sole, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore fruatur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos: & Ther-

mometro

mometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo à ſuperficiebus Planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. II. oſtenſum eſt quod globus Aquæ congelatæ in Aere noſtro, liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia Aeris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3200}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II.) in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe quam ſi totus ex Aqua conſtaret, ſic colligo. Si Globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quàm aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de cauſa Globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio Terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in

regionem

regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores ſunt quàm materia lucida Solaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore maſſa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur : veriſimile eſt quod copia materiæ totius in Terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quàm ſi tota ex aqua conſtaret ; præſertim cum Terram quaſi quintuplo denſiorem eſſe quàm Jovem jam ante oſtenſum ſit. Igitur ſi Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic ſpatio dierum viginti & unius, quibus longitudinem 320 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in Medio ejuſdem denſitatis cum Aere noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ vicibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione ; & aer, qui vicibus 800 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eadem ratione : ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitatis Terræ Solis & Planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypotheſin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

Solem motu perpetuo agitari ſed nunquam longe recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemediametrum Solis in eadem ratione circiter; commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in ſuperficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & diſtantia Saturni à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minori: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro à centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motûs perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum Solis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modò Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

Prop.

Prop. XIII. Theor. XIII.

Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis; ſi Sol quieſceret & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuò perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm ſi motus iſti circa Solem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1100; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni à Jove eſt ad diſtantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16x1100 ſeu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, à tanta in Jovem gravitate oriundus, evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus eſt vix ſuperat minutos duos primos. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16x81x2360}{25}$ ſeu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 ſeu 1 ad 1867.

Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor eſt quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem Libri Prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt Nodi. Attamen à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem contemni poſſunt.

Corol. 1. Quieſcunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione Syſtematis noſtri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium tranſverſas diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſeſquialtera temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. 1.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipſius ſemper reſpiciet, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à Terra. Hæc eſt libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta eſt ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porrò hæc ita ſe habere, ex Phænomenis manifeſtum eſt.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

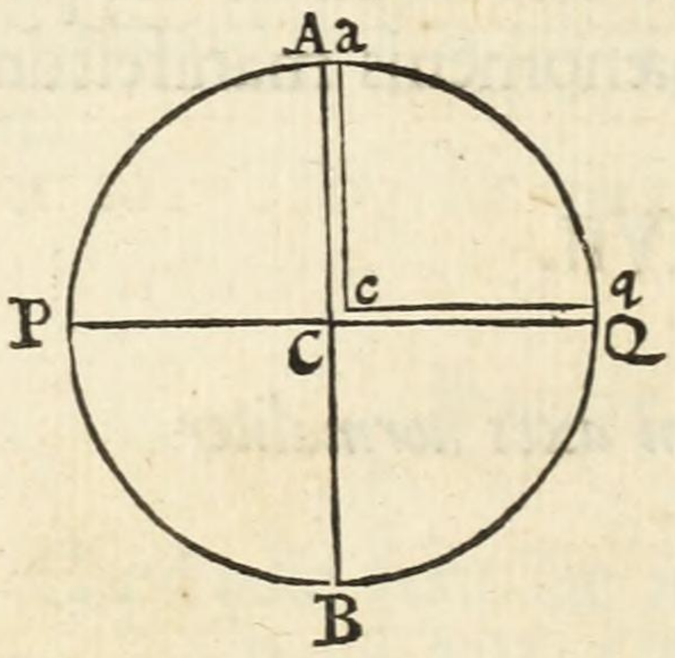
Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus obſervationibus *Caſſini* & *Flámſtedii*) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi Terra noſtra pau-

paulò altior eſſet ſub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Ad hujus Problematis ſolutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiſcitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ ſub æquatore, ex motu diurno oriunda, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad $290\frac{4}{5}$. Unde ſi $APBQ$ figuram Terræ deſignet revolutione Ellipſeos circa axem minorem PQ genitam; ſitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$ eſſe ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 ſuſtinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure ſuſtinebit partes reliquas. Porrò (ex Propoſitionis XCI. Corollario ſecundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod ſi Terra conſtaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in ſphæram centro C radio PC vel QC deſcriptam, ut $126\frac{2}{15}$ ad $125\frac{2}{5}$. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipſeos $APBQ$ circa axem AB deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC deſcriptam, ut $125\frac{2}{15}$ ad $126\frac{2}{15}$. Eſt autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæ-



Sphæra, diminuendo diametrum $P Q$ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AP, PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est ut 100 ad 101: Conjungantur jam hæ tres rationes, $126\frac{2}{15}$ ad $125\frac{2}{15}$, $125\frac{1}{2}$ ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum à centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 290. Hoc est, vis centripeta quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{290}$, & propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ superet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{290}$ faciet ut excessus altitudinis in crure $ACca$ sit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{3}{689}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem

ad

ad ipſius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cùm Terræ ſemidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum menſuram, ſit pedum Pariſienſium 19615800 ſeu milliarium 3923 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000;) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, exceſſu pedum 85200 ſeu milliarium 17.

Si Planeta vel major ſit vel denſior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23, 56′, *Jupiter* autem horis 9, 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum *Jovis* erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29\times3}{5\times689}$ ad 1, ſeu 1 ad $39\frac{3}{5}$. Eſt igitur diameter *Jovis* ab oriente in occidentem ducta, ad ipſius diametrum inter polos ut $40\frac{3}{5}$ ad $39\frac{3}{5}$ quam proximè. Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod uniformis ſit Planetarum materia. Nam ſi materia denſior ſit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in regionibus diverſis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt reciprocè ut 692 ad 689. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pon-

pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ locorum à centro; & propterea, ex Hypotheſi quod Terra Sphærois ſit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis, pergendo ab Æquatore ad Polos, ſit quam proximè ut Sinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eſt ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* eſt 48 *gr.* 45′: Ea Inſulæ *Goree* prope *Cape Verde* 14 *gr.* 15′: ea *Cayennæ* ad littus *Guaianæ* quaſi 5 *gr.* ea locorum ſub Polo 90 *gr.* Duplorum $97\frac{1}{2}$ *gr.* $28\frac{1}{2}$ *gr.* 10 *gr.* & 180 *gr.* Sinus verſi ſunt 11305, 1211, 152, & 20000. Proinde cum gravitas in Polo ſit ad gravitatem ſub Æquatore ut 692 ad 689, & exceſſus ille gravitatis ſub Polo ad gravitatem ſub Æquatore ut 3 ad 689; erit exceſſus gravitatis *Lutetiæ*, in Inſula *Goree* & *Cayennæ*, ad gravitatem ſub æquatore ut $\frac{3\times11305}{20000}$, $\frac{3\times1211}{20000}$ & $\frac{3\times152}{20000}$ ad 689, ſeu 33915, 3633, & 456 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 13813915, 13783633, 13780456 & 13780000. Quare cum longitudines Pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & $\frac{17}{24}$ partium digiti; longitudines Pendulorum in Inſulâ *Goree*, in illâ *Cayennæ* & ſub Æquatore, minutis ſingulis ſecundis oſcillantium ſuperabuntur à longitudine Penduli Pariſienſis exceſſibus $\frac{81}{1000}$, $\frac{89}{1000}$ & $\frac{90}{1000}$ partium digiti. Hæc omnia ita ſe habebunt, ex Hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtat. Nam ſi materia ad centrum paulò denſior ſit quàm ad ſuperficiem, exceſſus illi erunt paulò majores; propterea quòd, ſi materia ad centrum redundans, qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam erit

reciprocè ut distantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum distantiæ à materia illa quam proximè. Gravitas igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quàm pro computo superiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulò altius ascendet quàm in præcedentibus definitum est. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis singulis secundis oscillantium longitudo *Parisiis* major sit quàm in Insula *Goree*, parte decima digiti, & major quàm *Cayennæ* parte octava. Paulò majores sunt hæ differentiæ quam differentiæ $\frac{81}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$ quæ per computationem superiorem prodiere: & propterea (si crassis hisce Observationibus satìs confidendum sit) Terra aliquanto altior erit sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem. Si excessus gravitatis in locis hisce Borealibus supra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia institutis, accuratè tandem determinetur, deinde excessus ejus ubique sumatur in ratione Sinus versi latitudinis duplicatæ; determinabitur tum Mensura Universalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac densitas ejus ad centrum; ex Hypothesi quod densitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter decrescat. Quæ quidem Hypothesis, licet accurata non sit, ad ineundum tamen calculum assumi potest.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis Principiis conſequi.

Planetas majores,interea dum circa Solem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus,revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna noſtra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop.LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeò propius accedit ad Terram, in Syzygiis quàm in Quadraturis, niſi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima eſt (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis verſatur, & minima ubi idem in Quadraturis conſiſtit; & inde Luna in Perigæo velocior eſt & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quàm in Quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis ſuis, tardius regreditur in Quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quieſcunt in Syzygiis ſuis, & velociſſimè regrediuntur in Quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in Syzygiis: & motus medius velocior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum obſervatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeò perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam

gulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Aſtronomico, ad Proſtaphæreſin Lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi Lunarum ſeu Satellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis eſt ad motum medium Nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 9 *gr.* 34′. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat.

Æqua-

Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ reſpectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. Variatio Satellitis è Jove ſpectati, eſt ad Variationem Lunæ ut ſunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extimo non ſuperat $6''.22'''$. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum ſummè regulares reperiantur, utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut aſſerant tardiſſimè retrogradum. Nam *Flamſtedius* collatis ſuis cum *Caſſini* Obſervationibus Nodos tarde regredi deprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri debere.

Mare ſingulis diebus tam Lunaribus quàm Solaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum Luminarium ad Meridianum loci minori quàm ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter tertiam incidit, niſi ubi motus per loca vadoſa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulſu Luminaris utriuſque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm ſupra, & per horas diei Lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium

Con-

Conjunctione vel Oppoſitione conjungentur eorum effectus,& componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teſte, major eſt effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æſtus maximus qui ſola vi Lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam Lunarem, & ſola Solari in tertiam Solarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius eſt; adeoque in tranſitu Lunæ à Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt Octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in tranſitu Lunæ à Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκρμὼ venient.

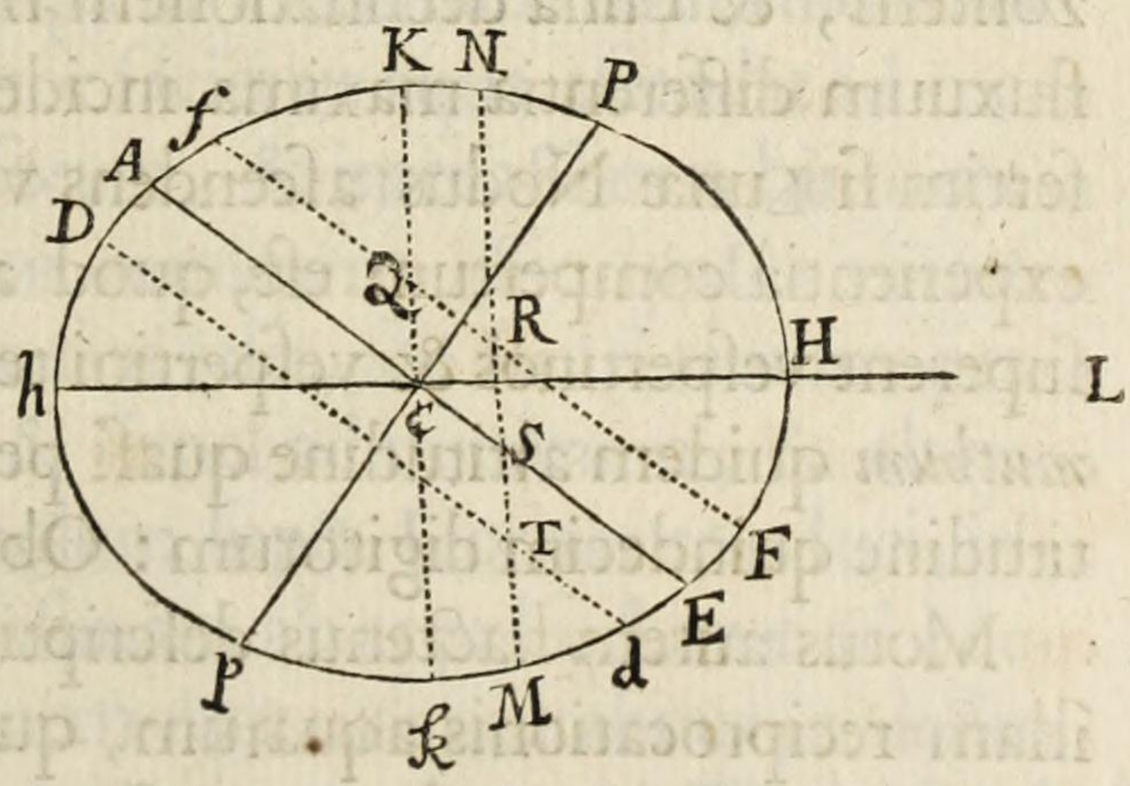
Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis à Terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in Syzygiis paulo majores ſint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æſtivo; & Luna in Perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quàm ante vel poſt dies quindecim, ubi in Apogæo verſatur. Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in Syzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius Declinatione ſeu diſtantia ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus

in

in Syzygiis Solſtitialibus quàm in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solſtitialibus majores ciebunt æſtus quàm in Quadraturis Æquinoctialibus; eò quod Lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maximè ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in Syzygiis comitatur ſemper minimus in Quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terra, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant Æquinoctium vernum quàm ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *A p E P* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P p*, polos; *A E* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *F f* parallelum loci; *D d* parallelum ei reſpondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *C H*, *C h* Maris altitudines maximas menſuratas à centro Telluris; & *C K*, *C k* altitudines minimas: & ſi axibus *H h*, *K k* deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *H h* deſcribatur Sphærois *H P K h p k*; deſignabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt *C F*, *C f*, *C D*, *C d* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *N M*, ſecantem parallelos *F f*, *D d* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *A E* in *S*; erit *C N* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo. Hinc in



revo-

revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in ☋ hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in ☋ hora tertia poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemiſphæricos, unum in Hemiſphærio *K H k C* ad Boream vergentem, alterum in Hæmiſphærio oppoſito *K h k C*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum Lunariuin duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem. Æſtus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ Nodus aſcendens verſatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: Obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æſtus, etiam ceſſantibus Luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt Syzygias majores reddit, eoſque proximè poſt Quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus non ſint primi à Syzygiis ſed tertii. Retardan-

tur

tur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeò ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & Fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

Porrò fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quàm per alia, quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce ſuo ad Meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batſham*, ſub latitudine Boreali 20 *gr.* 50 *min.* *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Lunâ ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad

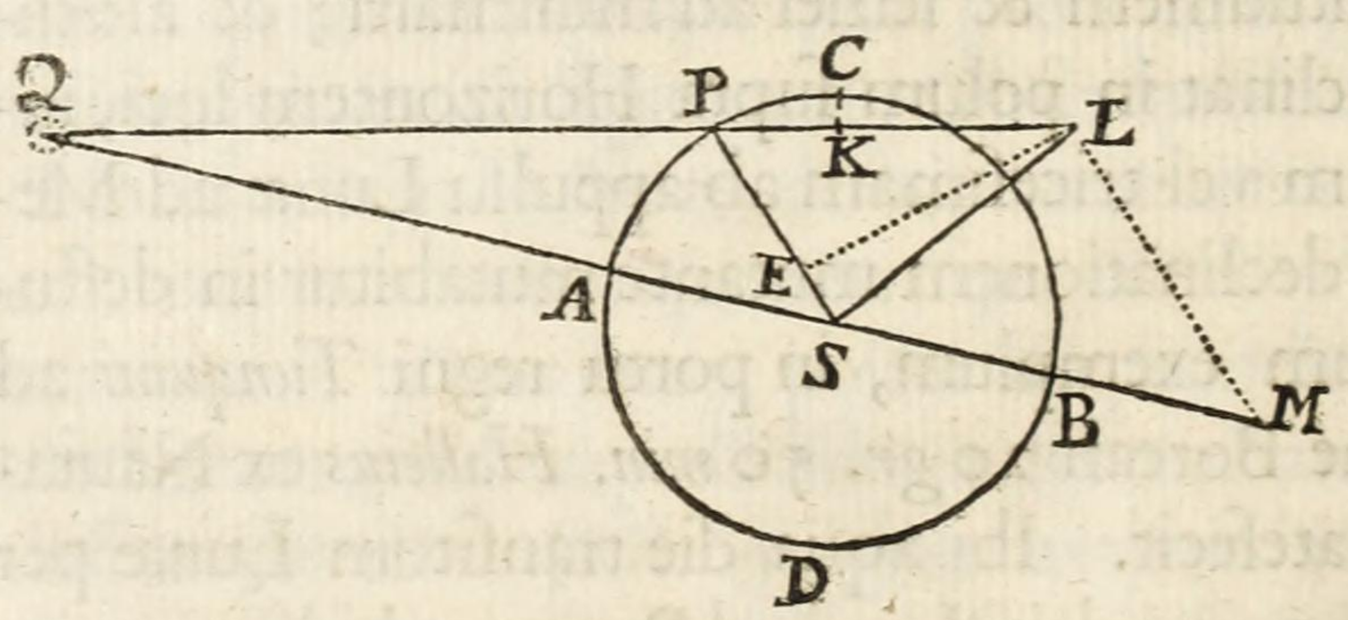
diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter à Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

Prop. XXV. Prob. V.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet ☉ Solem, *S* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In ☉*P* capiatur ☉*K* æqualis ☉*S*; ſitque ☉*L* ad ☉*K* in duplicata ratione ☉*K* ad ☉*P*, & ipſi *PS* agatur parallela *LM*; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ☉*S* vel ☉*K*, erit ☉*L* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus ☉*M*, *LM*, quarum *LM* & ipſius ☉*M* pars *SM* perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt.



Qua-

Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas *S M* & *M L* designare. Vis *M L* (in mediocri sua quantitate) est ad vim gravitatis,qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam *P S* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id est ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{8}{11}$. Vis qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam *P S* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60x60. Ideoque vis mediocris *M L* est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 x $60\frac{1}{2}$ ad 60 x 60 x 60 x $178\frac{8}{11}$ seu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum *S M*, *M L*, datur etiam vis *S M*: & hæ sunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

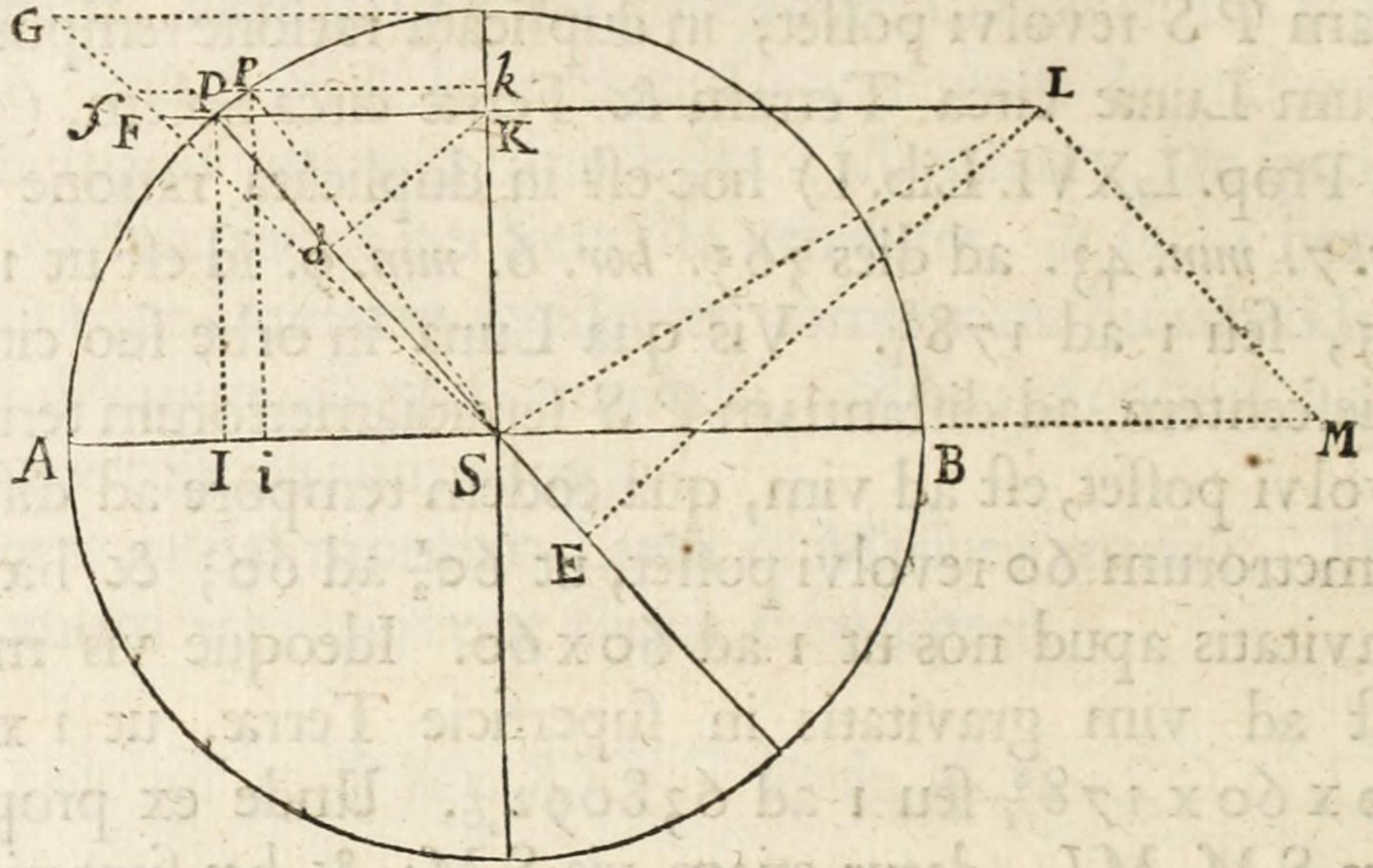
Prop. XXVI. Prob. VI.

Invenire incrementum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam ponamus etiam lineas *Q P*, *Q S* sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis *L M* reducetur semper ad mediocrem

ſuam quantitatem SP, ut & vis SM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim SL; & hæc vis, ſi in radium SP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires SE, EL, quarum SE, agendo ſemper ſecundum radium SP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ QSP

C



D

radio illo SP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius à Quadratura C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt ut $\frac{3PK \times SK}{SP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CSP, vel etiam per arcum CP. Ad CS erigatur Normalis CG ipſi CS æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductâque pk perpendiculari ad CS, jungatur SG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Sp, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times SK}{SP}$ id eſt ut EL; & compoſitè, area tota $GCKF$ ut

ſum-

ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam, atque adeò etiam ut velocitas hac ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CSP, ſeu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam SP, tempore ſuo periodico $CADBC$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CS cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2} CS$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in SP demiſſum ſit ipſius EL pars tertia, & ipſius SP ſeu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3}$ x 17872$\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore CS velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CS ſeu SP. Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream FK x Kk rectangulo $\frac{1}{2} SP$ x Pp æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat ut rectangulum $\frac{1}{2} SP$ x CP ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} SP$ x CA & triangulum SCG, ſive ut arcus quadrantalis CA ad radium SP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915 ſumma 11915 + 50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A, ac differentia 11915 — 50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum

SCG.

SCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii SP, id eſt ut Pd ad SP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris verè ſit dierum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut $11023 - 50$ ad $11023 + 50$, ſeu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad $10973 + Pd$, exiſtente videlicet SP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri $219\frac{46}{100}$ & Sinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadratura proxima, in circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi Variatio in Octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille verſus in eadem ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, ſingulis temporis momentis, deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ à Terrâ eſt in ratione compoſitâ ex dimidiatâ ratione Areæ directè & dimidiatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciprocè ut ipſius diſtantia à Terra. Tentent Aſtronomi quàm probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

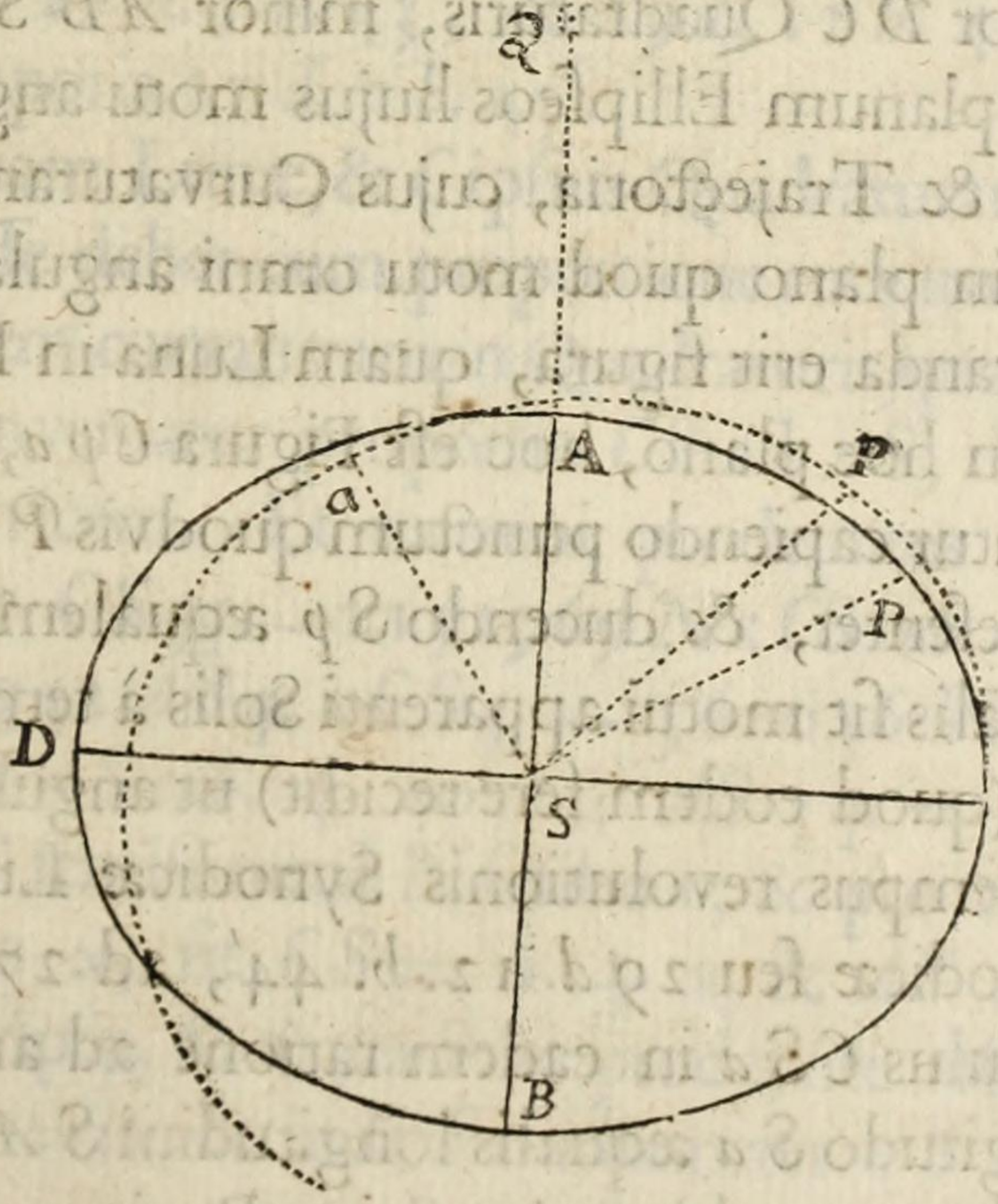
Corol.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratiùs ex Phænomenis quàm antehac definiri potest.

Prop. XXVIII. Prob. VIII.

Invenire diametros Orbis in quo Luna absque excentricitate moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem $2PK$ (Vide *Figur. pag.* 434.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris KS, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AS+CS}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{AS\,q.} - \frac{2000}{CS \times N}$ & $\frac{178725}{CS\,q.} + \frac{1000}{AS \times N}$ quam proxime; seu ut $178725\,N$ in $CS\,q. - 2000\,AS\,q.$ in CS, & $178725\,N$ in $AS\,q. + 1000\,CS\,q. \times AS$. Nam si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in Quadraturis est PS vel



vel SK & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris SM in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur à Terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in Quadraturis C & D ut CS, ad AS & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; id est ut $11073\,CS$ ad $10973\,AS$. Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem Curvaturam in Quadraturis ut $120407 \times 178725\,AS\,q. \times CS\,q. \times N - 120407 \times 2000\,AS\,qq. \times CS$ ad $122611 \times 178725\,AS\,q. \times CS\,q. \times N + 122611 \times 1000\,CS\,qq. \times AS$, id est ut $21531969\,AS \times CS \times N - 24081\,AS\,cub.$ ad $21913711\,AS \times CS \times N + 12261\,CS\,cub.$

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro S Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria, cujus Curvaturam consideramus, describi debet in plano quod motu omni angulari omnino destituitur: considerànda erit figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa, cujus puncta singula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, & ducendo Sp æqualem SP, ea lege ut angulus PSp æqualis sit motui apparenti Solis à tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CSp sit ad angulum CSP ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu 29 *d.* 12. *h.* 44′, ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Capiatur igitur angulus CSa in eadem ratione ad angulum rectum CSA, & fit longitudo Sa æqualis longitudini SA; & erit a Apsis ima & C Apsis summa orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a, & curvaturam circuli centro S intervallo SA descripti, sit ad differentiam inter

curva-

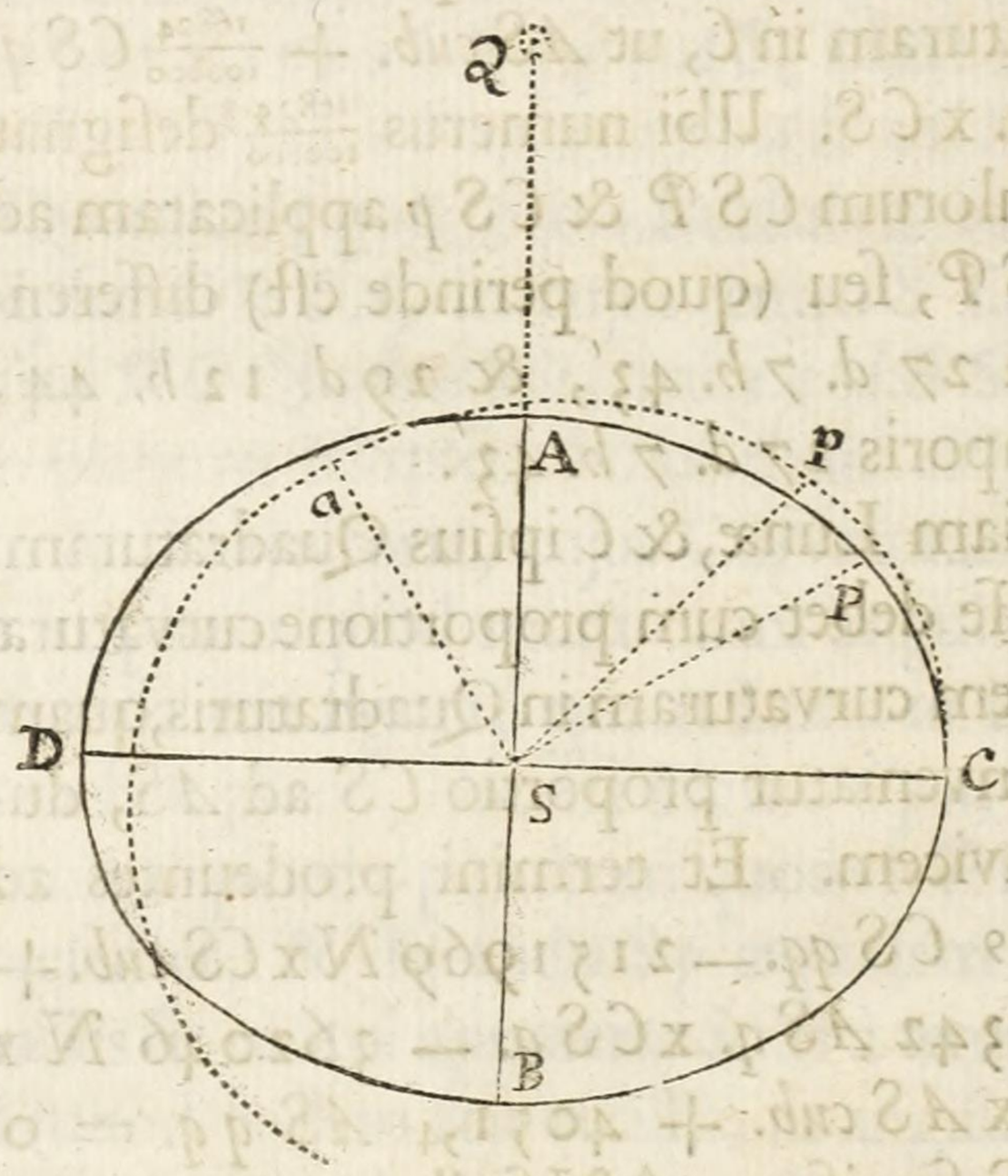
curvaturam Ellipſeos in vertice *A* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*; & quod curvatura Ellipſeos in *A* ſit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *S* intervallo *SC* deſcripti ut *SC* ad *SA*; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipſeos in *C* in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & differentia inter curvaturam Ellipſeos in vertice *C* & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Spa* in vertice *C* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*. Quæ quidem rationes ex Sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. Collatis autem his rationibus inter ſe, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipſius curvaturam in *C*, ut *AS cub.* + $\frac{16824}{100000}$ *CS q.* x *AS* ad *CS cub.* + $\frac{16824}{100000}$ *AS q.* x *CS*. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum *CSP* & *CSp* applicatam ad Quadratum anguli minoris *CSP*, ſeu (quod perinde eſt) differentiam Quadratorum temporum 27 *d.* 7 *h.* 43′, & 29 *d.* 12 *h.* 44′, applicatam ad Quadratum temporis 27 *d.* 7 *h.* 43′.

Igitur cum *a* deſignet Syzygiam Lunæ, & *C* ipſius Quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejuſdem curvaturam in Quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CS* ad *AS*, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad *AS* x *CS* applicati, fiunt 2062,79 *CS qq.* — 2151969 *N* x *CS cub.* + 368682 *N* x *AS* x *CS q.* + 36342 *AS q.* x *CS q.* — 362046 *N* x *AS q.* x *CS* + 2191371 *N* x *AS cub.* + 4051,4 *AS qq.* = 0. Hic pro terminorum *AS* & *CS* ſemiſummâ *N* ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo *x*, fit *CS* = 1 + *x*, & *AS* = 1 — *x*: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,0072036, & inde ſemidiameter *CS* fit 1,0072, & ſemidiameter *AS* 0,9928, qui numeri ſunt ut $69\frac{11}{12}$ & $68\frac{11}{12}$ quam proximè. Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terra in Syzygiis ad ipſius diſtantiam in Quadraturis (ſepoſita ſcilicet excentricitatis conſideratione) ut $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna P in Ellipsi $DBCA$ circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio SP ad Terram ducto describeret aream CSP tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima CS ad semidiametrum minimam SA ut $69\frac{10}{11}$ ad $68\frac{10}{11}$: foret Tangens anguli CSP ad Tangentem anguli motus medii à quadratura C computati, ut Ellipseos semidiameter SA ad ejusdem semidiametrum SC seu $68\frac{10}{11}$ ad $69\frac{10}{11}$. Debet autem descriptio areæ CSP, in progressu Lunæ à Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utq; excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum Sinus anguli CSP. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli CSP diminuatur in dimidiata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est in ratione numeri $68\frac{9^{c}8}{10000}$ ad numerum $68\frac{11}{12}$. Quo pacto tangens anguli CSP jam erit ad tangentem motus medii ut $68\frac{9^{c}8}{10000}$ ad $69\frac{11}{12}$, & angulus CSP in



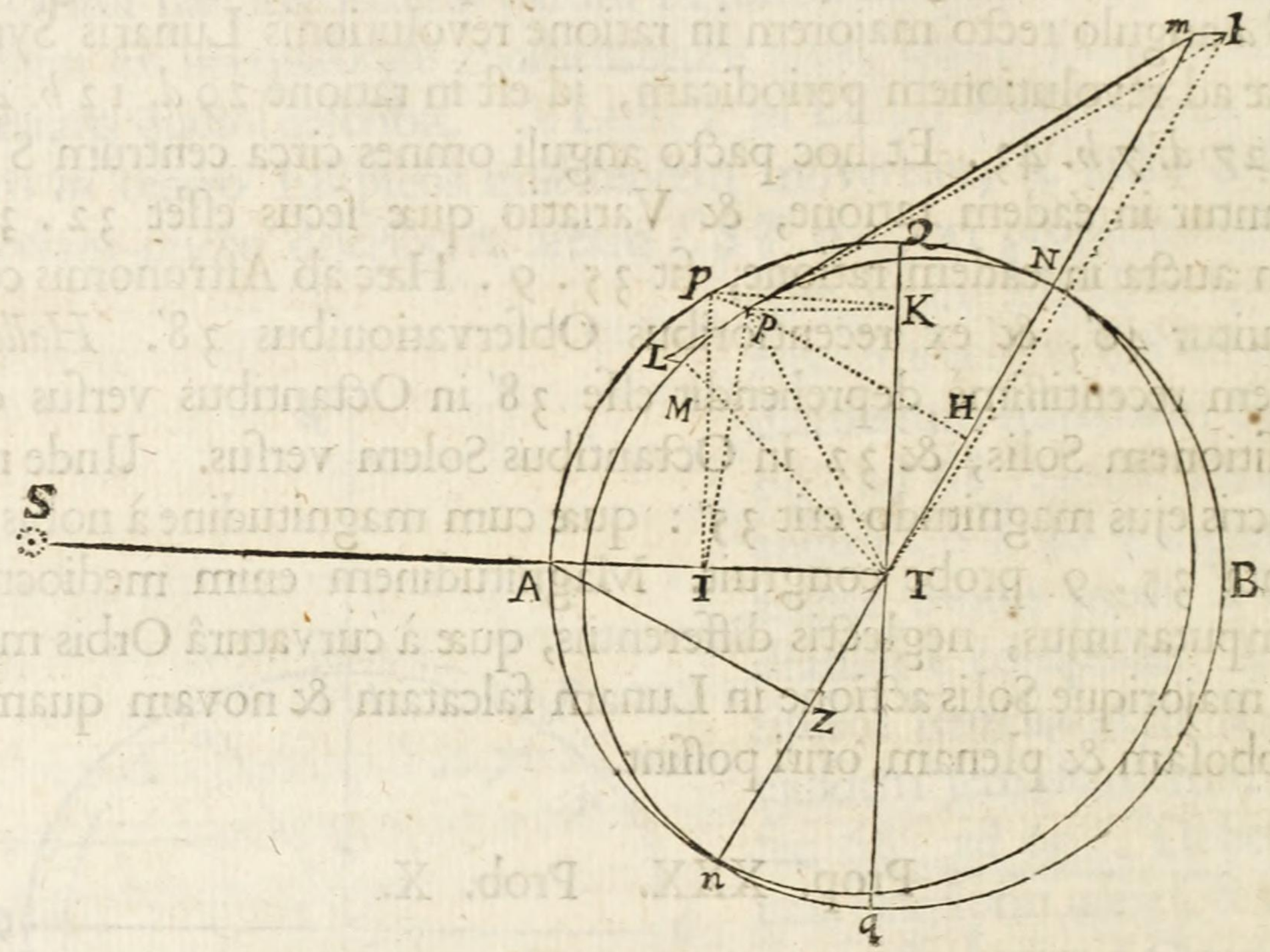
in Octantibus, ubi motus medius est 45 *gr.* invenietur 44 *gr.* 27′. 29″: qui subductus de angulo motus medii 45 *gr.* relinquit Variationem 32′. 31″. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo à Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum *CSA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in antecedentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum *CSa* angulo recto majorem in ratione revolutionis Lunaris Synodicæ ad revolutionem periodicam, id est in ratione 29 *d.* 12 *h.* 44′. ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum S dilatantur in eadem ratione, & Variatio quæ secus esset 32′. 31″. jam aucta in eadem ratione, fit 35′. 9″. Hæc ab Astronomis constituitur 40′, & ex recentioribus Observationibus 38′. *Halleius* autem recentissimè deprehendit esse 38′ in Octantibus versus oppositionem Solis, & 32′ in Octantibus Solem versus. Unde mediocris ejus magnitudo erit 35′: quæ cum magnitudine à nobis inventa 35′. 9″ probe congruit. Magnitudinem enim mediocrem computavimus, neglectis differentiis, quæ à curvaturâ Orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in Gibbosam & plenam, oriri possint.

Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* vestigium Orbis in plano Ecliptica; *N*, *n*, Nodos, *nTNm* lineam Nodorum infinitè productam, *PI*, *PK*; perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum Ecliptica; *Q*, *q* Quadraturas Lunæ in plano Ecliptica & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* Quadraturis intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex erit, altera lineæ 2*IT* vel 2*Kp*, altera lineæ *PI* proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, posteriore in lineam *ST* trahitur.

Componitur autem vis posterior *P I* ex viribus *I T* & *P T*, quarum *P T* agit secundum planum orbis Lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis autem *I T* cum vi 2 *I T* componit vim totam 3 *I T*, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. est ad vim qua Luna in



circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico revolvi posset, ut 3 *I T* ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut *I T* ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis ; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

De-

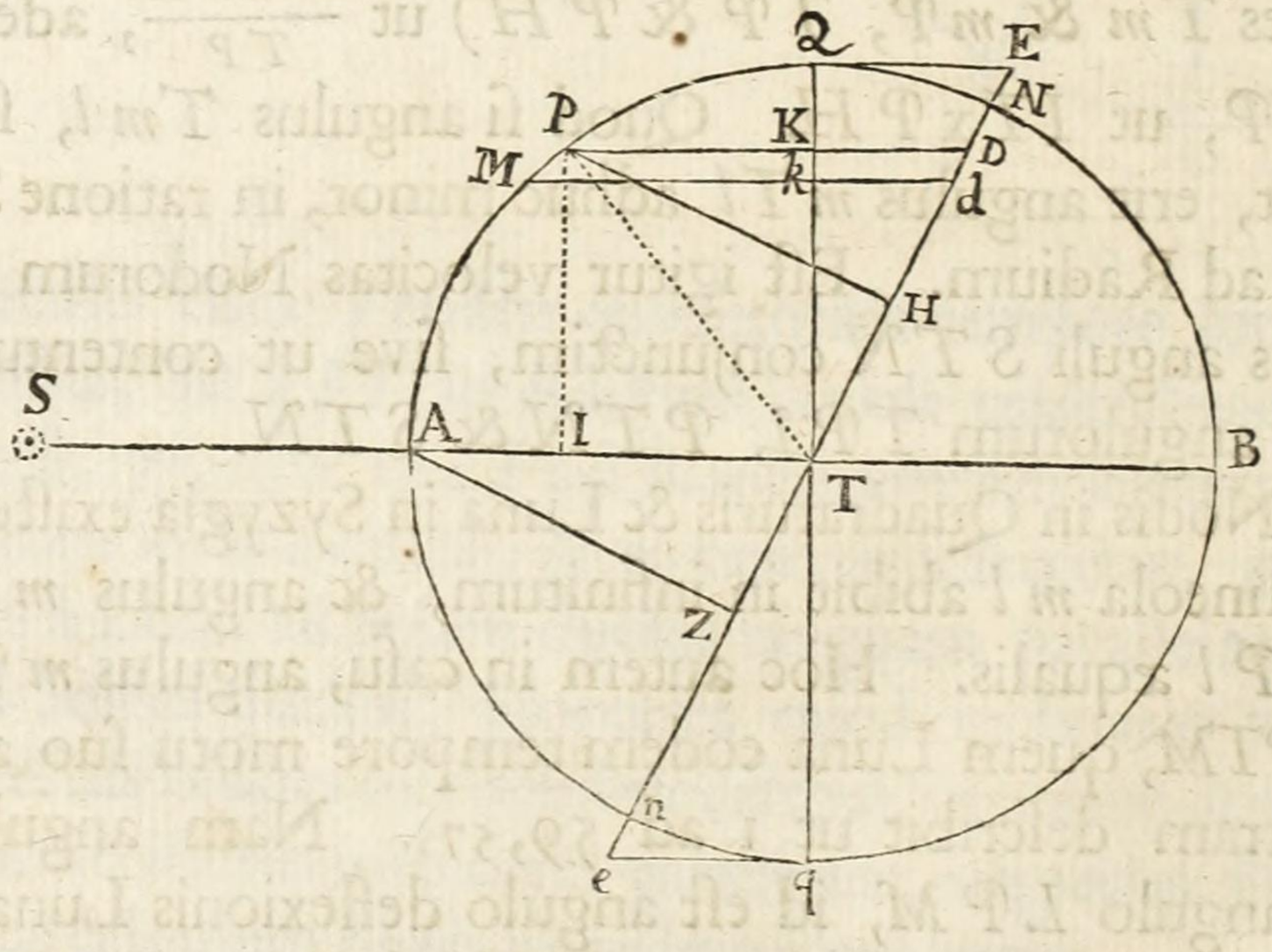
Deſignet jam P *M*arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo deſcribit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3 IT, eodem tempore deſcribere poſſet. Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad m & l, ubi ſecent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam ML parallela eſt ipſi ST, ſi ml parallela ſit ipſi ML, erit ml in plano Eclipticæ, & contra. Ergo ml, cum ſit in plano Eclipticæ, parallela erit ipſi ML, & ſimilia erunt triangula LMP, Lmp. Jam cum MPm ſit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n, ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa eſſet, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda eſſet LP, atque adeò transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus Nodorum à vi illa genitus æqualis erit angulo mTl. Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, adeoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum ML x mP, id eſt ut rectangulum IT x mP. Et angulus mTl, ſi modo angulus Tml rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$ id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP, ut IT x PH. Quod ſi angulus Tml, ſeu STN obliquus ſit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione Sinus anguli STN ad Radium. Eſt igitur velocitas Nodorum ut IT x PH & Sinus anguli STN conjunctim, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia exiſtentibus, recti ſint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in caſu, angulus mPl eſt ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis eſt angulo LPM, id eſt angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quam præfata vis Solaris 3 IT dato illo tempore generare poſſit; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis

Lunæ

Lunæ à recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe ſuo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti ſupra diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (reſpectu fixarum) ſit $32'.56''.27'''.12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''.10'''.33^{iv}.12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''.10'''.33^{iv}.12^{v}$. ut contentum ſub ſinibus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum Lunæ à Quadratura, Lunæ à Nodo & Nodi à Sole) ad cubum Radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec ſecent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres Sinus. Nempe *PK* Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadratura, *PH* Sinus diſtantiæ Lunæ à Nodo, & *AZ* Sinus diſtantiæ Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum *PK* x *PH* x *AZ*. Eſt autem



autem $\mathcal{P}T$ ad $\mathcal{P}K$ ut $\mathcal{P}M$ ad Kk, adeoque ob datas $\mathcal{P}T$ & $\mathcal{P}M$ est Kk ipsi $\mathcal{P}K$ proportionalis. Est & AT ad $\mathcal{P}D$ ut AZ ad $\mathcal{P}H$, & propterea $\mathcal{P}H$ rectangulo $\mathcal{P}D$ x AZ proportionalis, & conjunctis rationibus, $\mathcal{P}K$ x $\mathcal{P}H$ est ut contentum Kk x $\mathcal{P}D$ x AZ, & $\mathcal{P}K$ x $\mathcal{P}H$ x AZ ut Kk x $\mathcal{P}D$ x AZ *qu.* id est ut area $\mathcal{P}D\,d\,M$, & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut quadratum Sinus distantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $\mathcal{P}D\,d\,M$, quo tempore Luna pergit à Q ad M, erit area $QM\,d\,E$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea $\mathcal{P}D$ describit; dein Luna pergente ab n ad q, linea $\mathcal{P}D$ cadet extra circulum, & aream $n\,q\,e$ ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $\mathcal{P}D\,d\,M$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $\mathcal{P}D\,d\,M$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu $\mathcal{P}M$ & radio MT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quàm revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit $33''.\ 10'''.\ 33^{v}.\ 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit

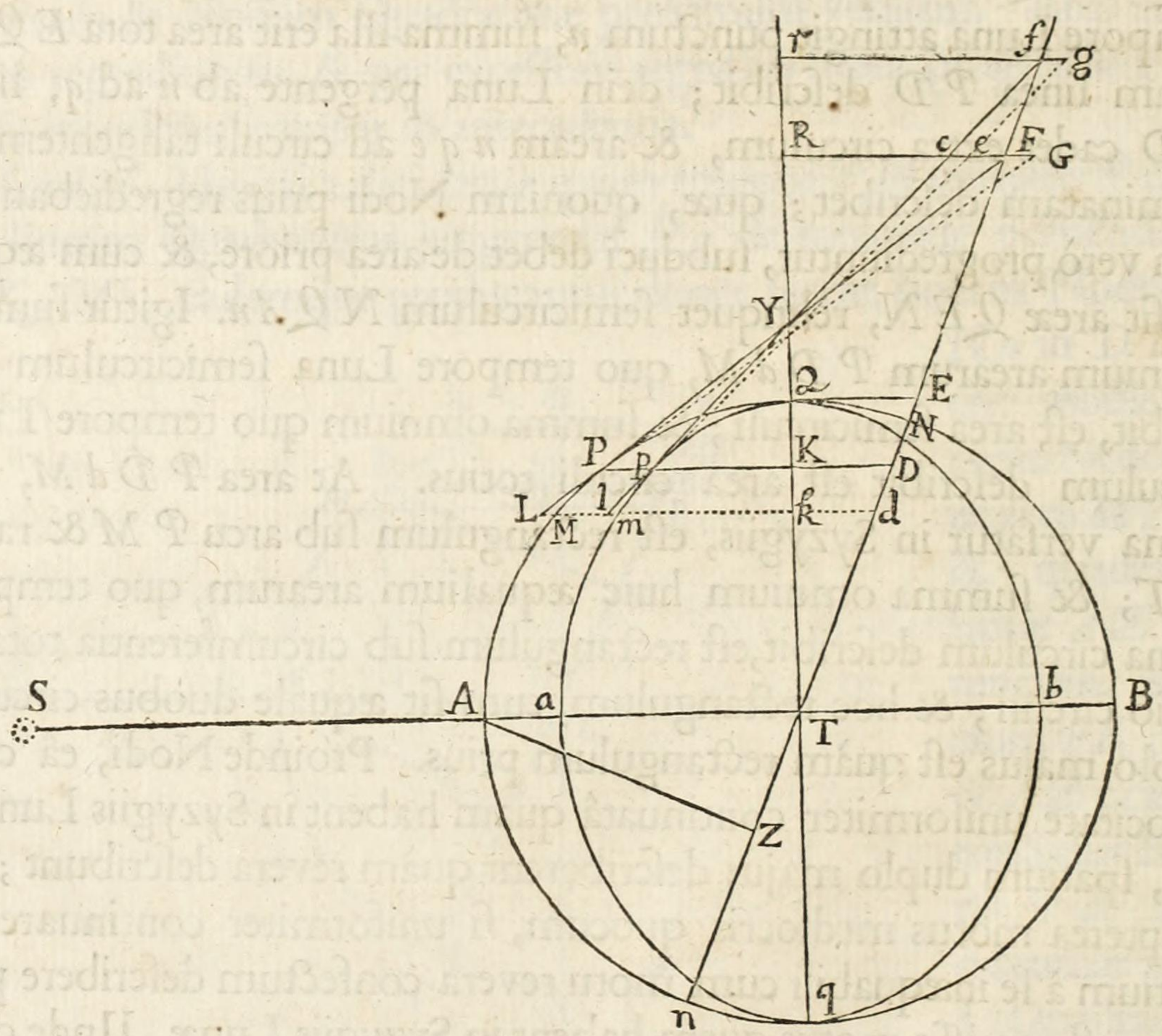
16'.

$16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. Et cum motus horarius Nodorum ſemper ſit ut *A Z qu.* & area *P D d M* conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut *A Z qu.* & area *P D d M* conjunctim, id eſt (ob datam aream *P D d M* in Syzygiis deſcriptam) ut *A Z qu.* erit etiam motus mediocris ut *A Z qu.* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas verſantur, erit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut *A Z qu.* ad *A T qu. Q. E. D.*

Prop. XXXI. Prob. XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Deſignet *Q p m a q* Ellipſim, axe majore *Q q*, minore *a b* deſcriptam, *Q A q* circulum circumſcriptum, *T* Terram in utriuſque



centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipſi moventem, & *p m* arcum quem data temporis particula quam minima deſcribit, *N* & *n* Nodos

Nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in axem Qq demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ Nodorum in D & d. Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area ~~$pKkm$~~. $pDdm$

Nam si PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F, & pf tangat Ellipsin in p & producta occurrat eidem TN in f, conveniant autem hæ Tangentes in axe TQ ad Υ; & si ML designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano Ecliptice in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta secet pf, pg & TQ in c, e & R respectivè, & fg producta secet TQ in r: Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in Ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK, id est ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id est (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inversè ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY, id est ut fr ad cR, (hoc est ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; propterea quod anguli, quos FG & fg subtenderent ad Terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione expossuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in circulo arcum PM, in Ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY,

id est si fg æqualis esset $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$. Verum ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$, & propterea angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est motus Nodorum in Ellipsi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$, id est ut $fp \times c\Upsilon$ ad $cp \times f\Upsilon$, seu fp ad $f\Upsilon$ & $c\Upsilon$ ad cp; hoc est, si pb ipsi TN parallela occurrat $F\mathcal{P}$ in b, ut Fb ad $F\Upsilon$ & $F\Upsilon$ ad $F\mathcal{P}$; hoc est ut Fb ad $F\mathcal{P}$ seu $\mathcal{D}p$ ad $\mathcal{D}\mathcal{P}$, adeoque ut area $\mathcal{D}pmd$ ad aream $\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{M}d$. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum $p\mathcal{D}dm$, quo tempore Luna pergit à Quadratura ad locum quemvis m, sit area $mpQEd$, quæ ad Ellipseos Tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in circulo, ut Ellipsis ad circulum, id est ut Ta ad TA, seu $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in circulo sit ad $16''.35'''.16^{iv}.36^{v}$. ut $AZ\,qu.$ ad $AT\,qu.$ si capiatur angulus $16''.21'''.2^{iv}.36^{v}$. ad angulum $16''.35'''.16^{iv}.36^{v}$. ut $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad $16''.21'''.2^{iv}.36^{v}$. ut $AZ\,q.$ ad $AT\,q.$; hoc est ut quadratum Sinus distantiæ Nodi à Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quàm in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50.

Unde

Unde cum tempus Lunæ in ſingulis Orbis particulis æqualibus ſit reciprocè ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad exceſſum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem à Quadraturis ad Syzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in Quadraturis, ſit ut quadratum Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadrantibus quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, eſt ut differentia inter quadratum Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias eſt in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna percurrit *P M*, (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quam proximè. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, eſt quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum Sinus diſtantiæ Lunæ à Quadratura & ſemiſſem quadrati Radii ad ſemiſſem quadrati Radii, conjunctim. Unde ſi Nodi in Quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde diſtantia, & alia duo à Syzygiâ & Quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duabus inter Syzygiam & Octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti ratio-

nem ineunti facilè conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''.42'''.5^{iv}.12^{v}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''.43^{iv}.10^{v}$, cujus pars quarta $4'''.25^{iv}.48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''.21'''.2^{iv}.36^{v}$. ſubducta, relinquit $16''.16'''.36^{iv}.48^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

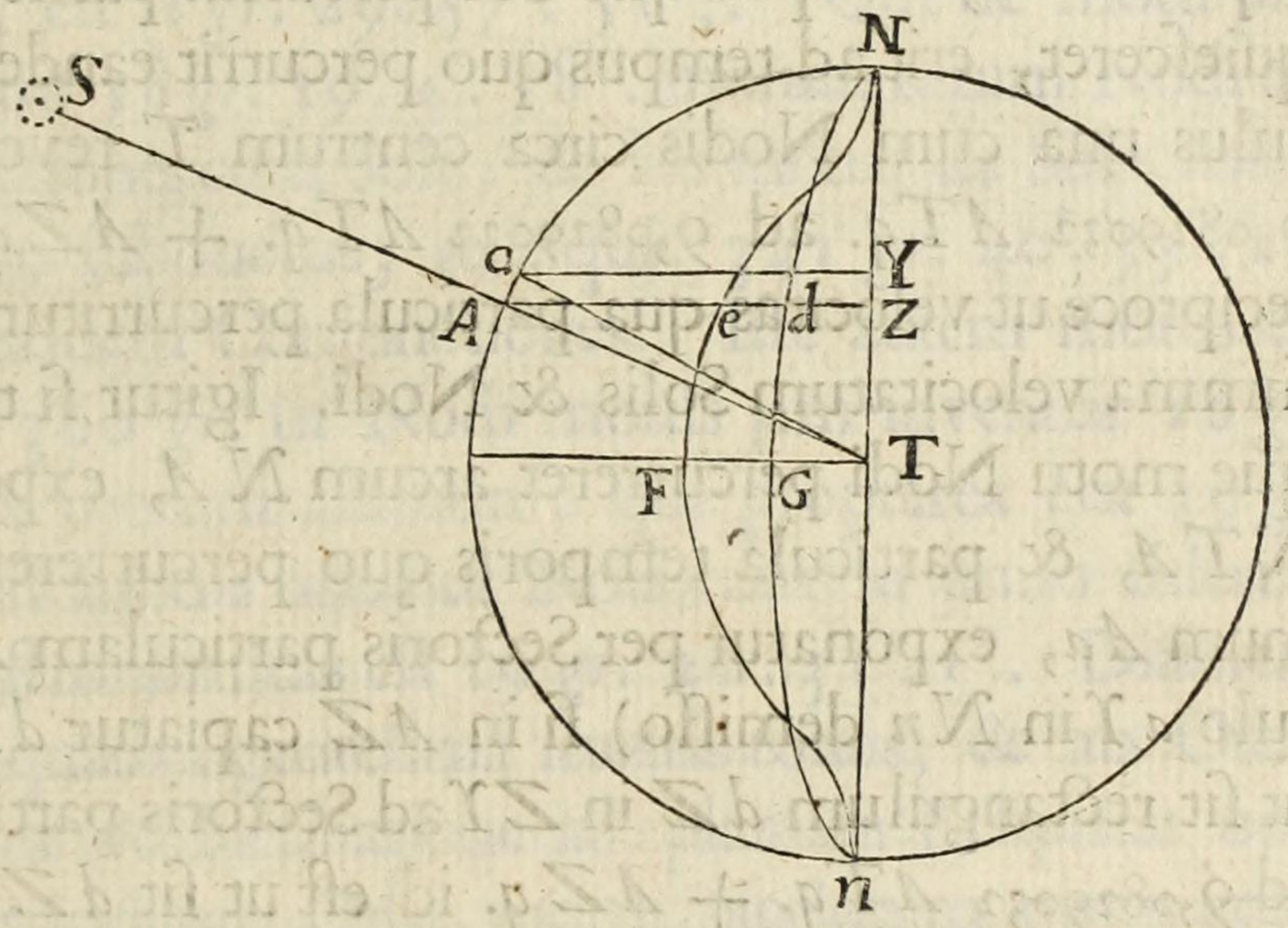
Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectentur loca bina à Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, à cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''.16'''.36^{iv}.48^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt ut quadratum Sinus diſtantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii.

Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea verò Solem *S*, per motum Terræ, progredi à Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem ſemper ducta, inter-

interſectione ſua & circuli $N A n$, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut $A Z$ q. id eſt (ob proportionales $A Z$, $Z \Upsilon$) ut rectangulum ſub $A Z$ & $Z \Upsilon$, hoc eſt ut area $A Z \Upsilon a$. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum $a \Upsilon Z A$, id eſt ut area $N A Z$. Eſt autem maxima $A Z \Upsilon a$ æqualis rectangulo ſub arcu $A a$ & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. 6 *hor.* 9 *min.* fit $39\,gr. 38'. 5''. 39'''$. Ideoque hujus dimidium $19\,gr. 49'. 2''. 49'''\frac{1}{2}$ eſt motus medius Nodorum circulo toti reſpondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A, eſt ad $19\,gr. 49'. 2''. 49'''\frac{1}{2}$ ut area $N A Z$ ad circulum totum.



Hæc ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39\,gr. 38'. 5''. 39'''$ ſeu 39,6349 gradus; & motus mediocris Nodi

in

in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in Quadraturis ſuis, ut $AZq.$ ad $ATq.$ erit motus Solis ad motum Nodi in N, ut 360 $ATq.$ ad 39,6349 $AZq.$; id eſt ut 9,0829032 $ATq.$ ad $AZq.$ Unde ſi circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo Sol percurrat particulam Aa; ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0829032 $ATq.$ ad 9,0829032 $ATq. + AZq.$ Nam tempus eſt reciprocè ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum Solis & Nodi. Igitur ſi tempus, quo Sol abſque motu Nodi percurreret arcum NA, exponatur per Sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa, exponatur per Sectoris particulam ATa; & (perpendiculo $a\Upsilon$ in Nn demiſſo) ſi in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis ut ſit rectangulum dZ in $Z\Upsilon$ ad Sectoris particulam ATa ut $AZq.$ ad 9,0829032 $ATq. + AZq.$ id eſt ut ſit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut $ATq.$ ad 9,0829032 $ATq. + AZq.$; rectangulum dZ in $Z\Upsilon$ deſignabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et ſi punctum d tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea exceſſus Sectoris NAT ſupra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in AZ longitudo eZ, quæ ſit ad longitudinem AZ ut $AZq.$ ad 9,0829032 $ATq. + AZq.$ Sic enim rectangulum eZ in $Z\Upsilon$ erit ad aream $AZ\Upsilon a$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum, quo percurreretur ſi Nodus quieſceret: Et propterea rectangulum illud reſpondebit decremento motus Nodi. Et ſi punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus quo tempore arcus

totus

totus NA, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò si circuli radius AT ponatur 1, erit area semicirculi 1,570796; & area figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæsita, prodibit 0,1188478. Motus autem qui respondet circulo toti erat 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½; & propterea motus, qui figuræ $NeFnT$ duplicatæ respondet, est 1 *gr.* 29′. 57″. 51‴½. Qui de motu priore subductus relinquit 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341 *gr.* 40′. 55″. 2‴. motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360 *gr.* ut Nodi motus jam inventus 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est 19 *gr.* 20′. 31″. 1‴. Differentia minor est parte quadringentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Ecliptícæ oriri videtur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

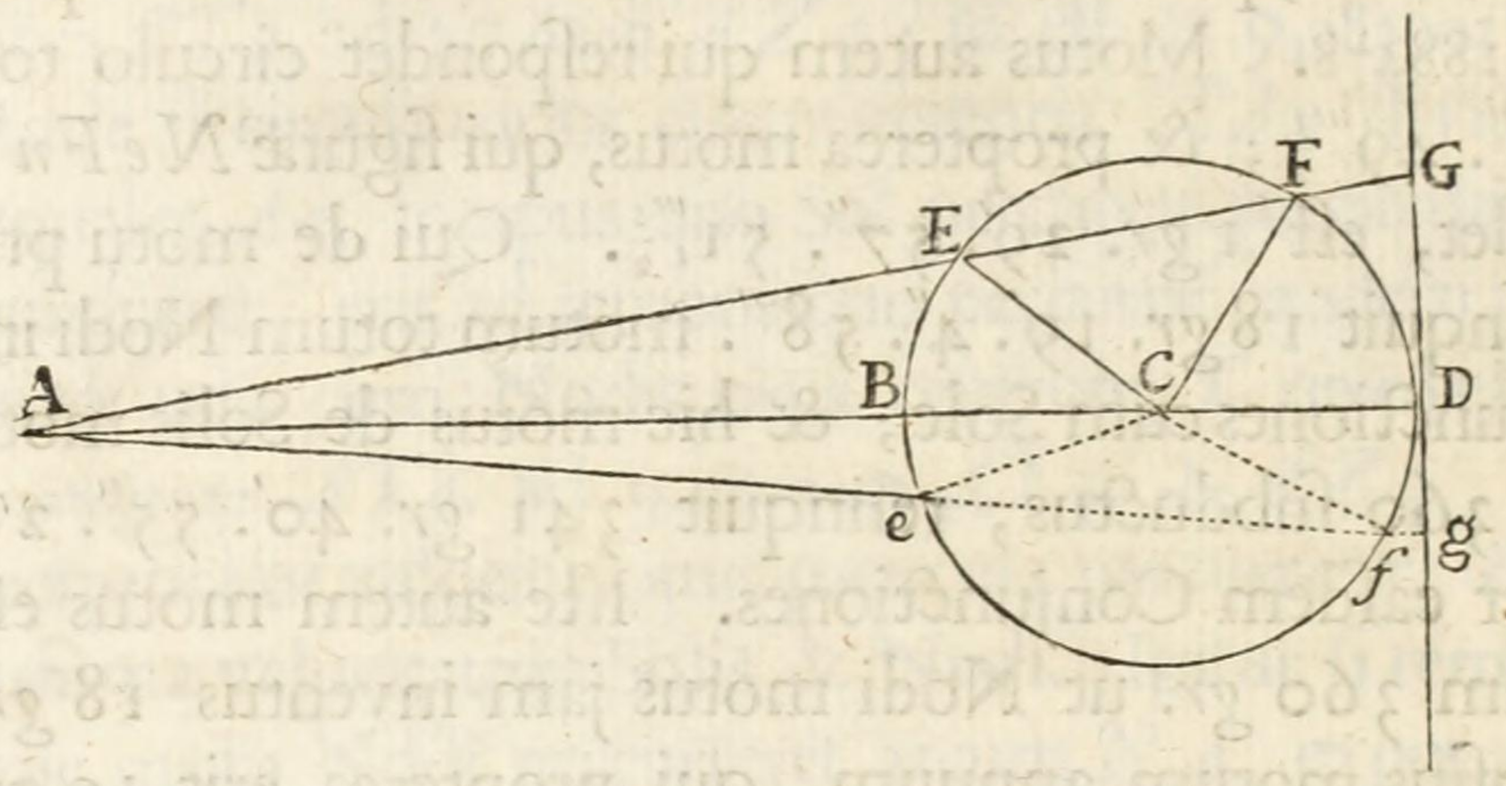
Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iste est ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, describatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis: (id est ut 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, atque adeo BC ad AC ut motuum differentia 0 *gr.* 31′. 2″. 27‴½, ad motum superiorem 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, hoc est, ut 1. *posteriorem*

ad

ad $3\ 8\frac{1}{3}$) dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & si capiatur angulus BCE vel BCF æqualis semissi distantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF secans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui sit ad motum Nodi inter ipsius Syzygias (id est ad 9 *gr.* 10′. 40″.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam, atque angulus iste ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.



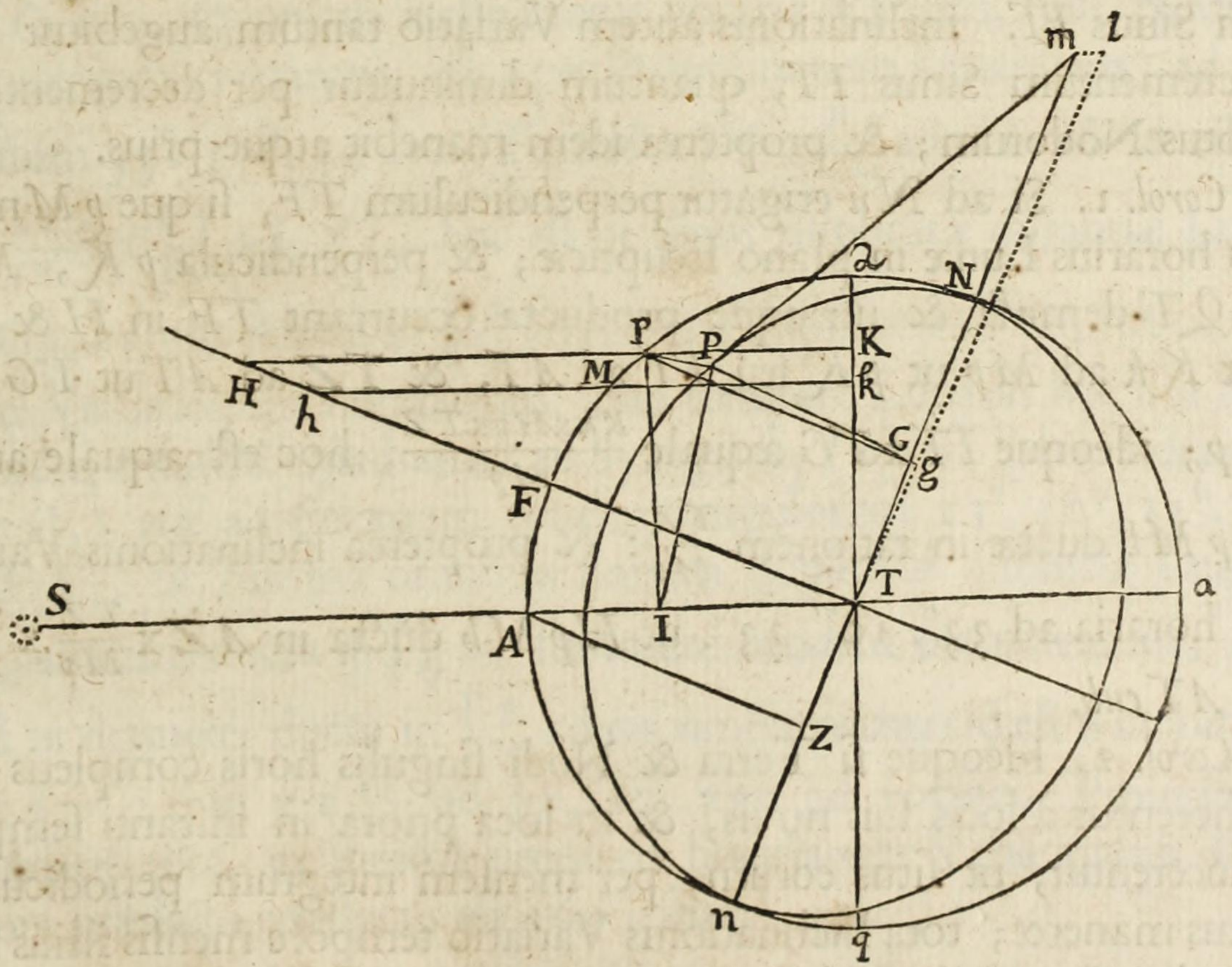
Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario 1 6″. 1 8‴. 4 1$^{iv}\frac{1}{2}$. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit 1 *gr.* 30′. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Prop.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano Eclipticæ, & *m T l* motum momentaneum Nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *T m* demittatur perpendiculum *P G*, jungatur *p G*,



& producatur ea donec occurrat *T l* in *g*, & jungatur etiam *P g*: erit angulus *P G p* inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna verſatur in *P*; & angulus *P g p* inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum, adeoque angulus *G P g* Variatio

momentanea inclinationis. Eſt autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus GTg (per Prop. XXX.) ſit ad angulum $33''.10'''.33^{iv}$. ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (ſeu inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''.10'''.33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub. Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyratur. Quod ſi orbis ille Ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus IT. Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum Sinus IT, quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum; & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit Kk ad Mp ut pK ſeu IT ad AT, & TZ ad AT ut TG ad Hp; ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis Variatio horaria ad $33'.10'''.33^{v}$. ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore menſis illius foret ad $33''.10'''.33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genetarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$, ad $Mp \times AT$ *cub.* id eſt ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.*

cub. hoc est ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{P\,p}{PG}$ ad ~~$2Mp \times PT$ quad.~~ $2MP \times ATqu$

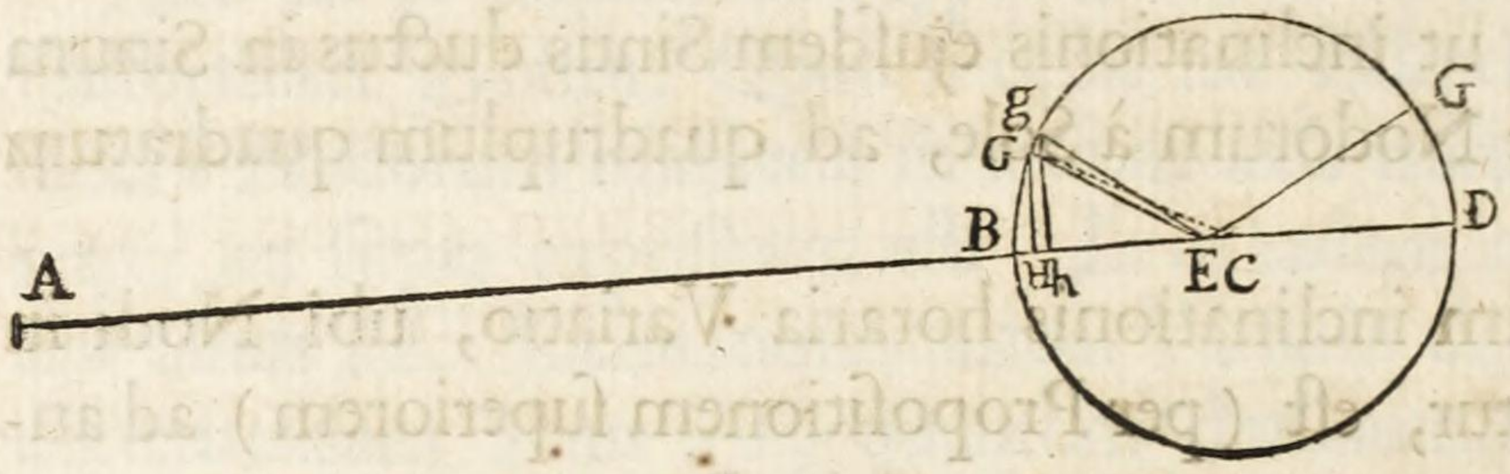
Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuatâ Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $AZ \times TZ \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $2AT\,q.$ id est (cum Pp sit ad PG ut Sinus Inclinationis præ-dictæ ad Radium, & $\frac{AZ \times TZ}{AT}$ sit ad $\frac{1}{2}AT$ ut sinus duplicati anguli ATn ad Radium) ut inclinationis ejusdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ distantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per Propositionem superiorem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad AT *cub.* id est ut $\frac{IT \times TG}{AT} \times \frac{P\,p}{PG}$ ad AT; hoc est ut Sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{P\,p}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ seu $5878''\frac{1}{2}$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{P\,p}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est ut diameter ducta in $\frac{P\,p}{PG}$, ad circumferentiam; id est si inclinatio sit $5\,gr.\ 2'$, ut $7 \times \frac{876}{10000}$ ad 22, seu 279 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est $164''$, seu $2'.\ 44''$.

Prop. XXXV. Prob. XV.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Ecliptica.

Sit *AD* Sinus inclinationis maximæ, & *AB* Sinus Inclinationis minimæ. Biſecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC*, deſcribatur Circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in ea ratione ad *EB* quam *EB* habet ad 2*BA*: Et ſi dato tempore conſtituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* Sinus inclinationis quæſitæ.



Nam *GEq.* æquale eſt *GHq.* + *HEq.* = *BHD* + *HEq.* = *HBD* + *HEq.* — *BHq.* = *HBD* + *BEq.* — 2*BH* x *BE* = *BEq.* + 2*EC* x *BH* = 2*EC* x *AB* + 2*EC* x *BH* = 2*EC* x *AH*. Ideoque cum 2*EC* detur, eſt *GEq.* ut *AH*. Deſignet jam *AEg* diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus *Gg*, ob datum angulum *GEg*, erit ut diſtantia *GE*. Eſt autem *Hh* ad *Gg* ut *GH* ad *GC*, & propterea *Hh* eſt ut contentum *GH* x *Gg* ſeu *GH* x *GE*; id eſt ut $\frac{GH}{GE}$ x *GE qu.* ſeu $\frac{GH}{GE}$ x *AH*, id eſt ut *AH* & ſinus anguli *AEG* conjunctim. Igitur ſi *AH* in caſu aliquo ſit Sinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed *AH* ubi punctum *G* incidit in punctum alterutrum *B* vel *D* huic Sinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In

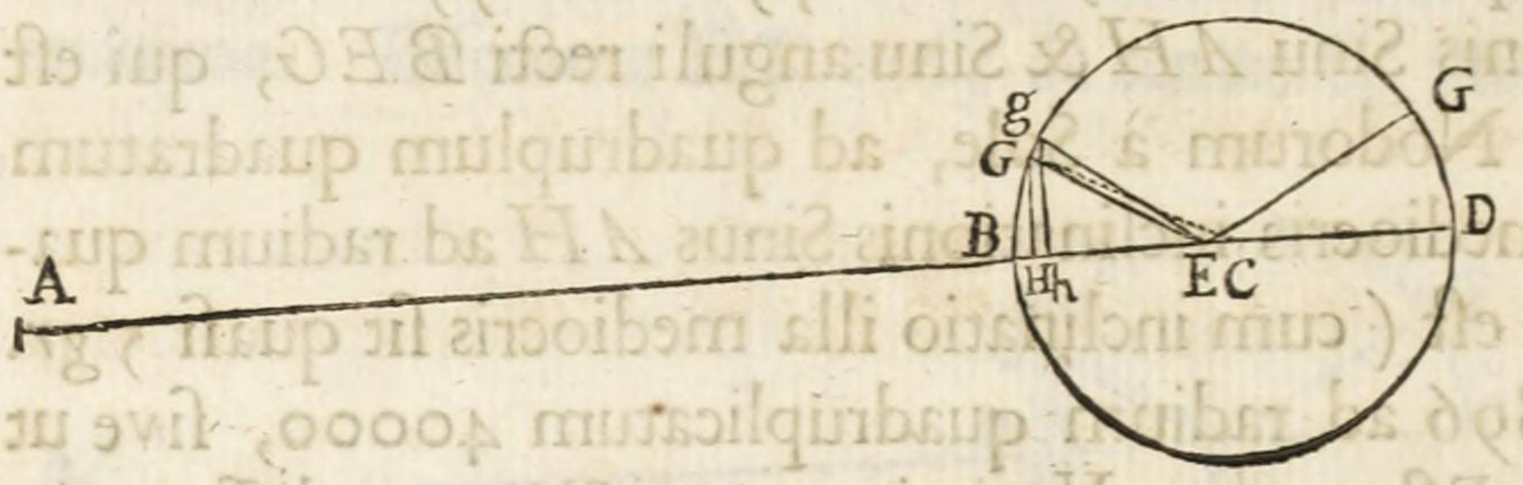
In hac demonſtratione ſuppoſui angulum *BEG*, qui diſtantia eſt Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum *BEG* rectum eſſe, & *Gg* eſſe augmentum horarium diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.10'''.33^{iv}$. ut contentum ſub inclinationis Sinu *AH* & Sinu anguli recti *BEG*, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id eſt ut mediocris inclinationis Sinus *AH* ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi 5 *gr.* $8'\frac{1}{2}$) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem Variatio tota, Sinuum differentiæ *BD* reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *BGD* & tempus horarum 2080, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt ut 7 ad 11 & 2080 ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota *BD* ad $33''.10'''.33^{iv}$. ut 224x7x2080 ad 110000, id eſt ut 2965 ad 100, & inde Variatio illa *BD* prodibit $16'.24''$.

Hæc eſt inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi Nodi in Syzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu Lunæ. At ſi Nodi in Quadraturis conſiſtunt, inclinatio major eſt ubi Luna verſatur in Syzygiis, quàm ubi ea verſatur in Quadraturis, exceſſu $2'.44''$; uti in Propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'.22''$ Variatio tota mediocris *BD* in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15'.2''$, in ipſius autem Syzygiis aucta fit $17'.46''$. Si Luna igitur in Syzygiis conſtituatur, Variatio tota, in tranſitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'.46''$. adeoque ſi Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis verſantur, ſit 5 *gr.* $17'.46''$. eadem, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5 *gr.* Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex Obſervationibus. Nam ſtatuunt Aſtronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclip-

ticæ,

ticæ, ubi Nodi ſunt in Quadraturis & Luna in oppoſitione Solis, eſſe quaſi 5 *gr.* Ubi verò Nodi ſunt in Syzygiis, eandem docent eſſe 5 *gr.* $17\frac{1}{2}''$ vel 5 *gr.* 18′.

Si jam deſideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis verſantur; fiat *AB* ad *AD* ut Sinus 5 *gr.* ad Sinum 5 *gr.* 17′. 46″, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit *AH* Sinus Inclinationis quæſitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis eſt ejuſdem Inclinatio, ubi Luna diſtat 90 *gr.* à Nodis. Aliis in Lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus Nodorum, (ut ſupra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi poteſt.



Scholium.

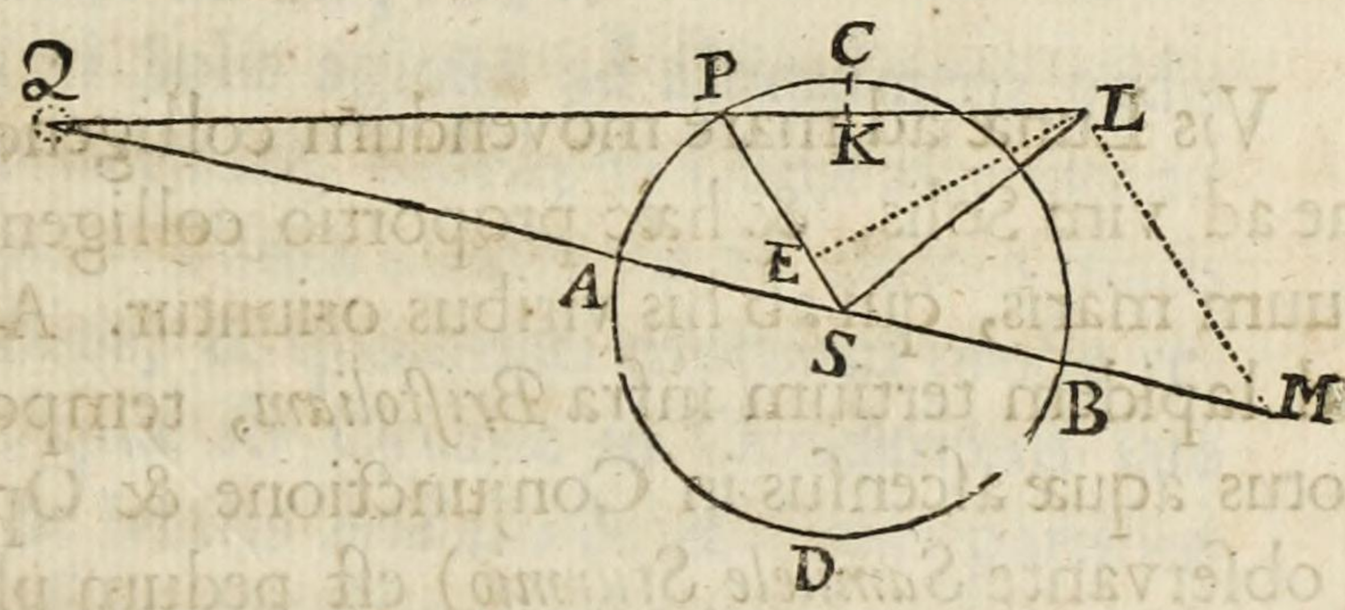
Hactenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non conſideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum, ubi in Conjunctione vel Oppoſitione Solis verſatur, progreditur ſingulis diebus 23′ reſpectu Fixarum; ubi verò in Quadraturis eſt, regreditur ſingulis diebus $16\frac{1}{3}$ circiter: quodque ipſius motus medius annuus ſit quaſi 40 *gr.* Per Tabulas Aſtronomicas à *Cl. Flamſtedio* ad Hypotheſin *Horroxii* accommodatas, Apogæum in ipſius Syzygiis progreditur cum motu diurno 24′. 28″, in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno 20′. 12″, & motu medio annuo 40 *gr.* 41′ fertur in conſequentia. Quod differentia inter motum diurnum progreſſivum Apogæi in ipſius Syzygiis, & motum diurnum regreſſivum in ipſius Quadraturis, per Tabulas ſit 4′. 16″, per computationem verò noſtram $6'\frac{2}{3}$, vitio Tabularum tribuendum eſſe ſuſpi-

ſuſpicamur. Sed neque computationem noſtram ſatis accuratam eſſe putamus. Nam rationem quandam ineundo prodiere Apogæi motus diurnus progreſſivus in ipſius Syzygiis, & motus diurnus regreſſivus in ipſius Quadraturis, paulo majores. Computationes autem, ut nimis perplexas & approximationibus impeditas, neque ſatis accuratas, apponere non lubet.

Prop. XXXVI. Prob. XVI.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML ſeu PS, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 638092,6. Et vis $SM - LM$ ſeu $2PK$ in Syzygiis Lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem Terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro Terræ, id eſt in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in ſuperficie Terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 *gr.* diſtant à Sole. Vi alterâ quæ duplo major eſt Mare elevatur, & ſub Sole & in regione Soli oppoſita. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 *gr.* diſtant à Sole, ſive elevet eandem in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, hæc ſumma erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac ſi tota in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 *gr.* diſtant à Sole nil ageret.



Corol.

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum Pariſienſium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 ſeu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant à Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ*, ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25: Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter à Terra diſtantium, ſunto vires *S* & *L*. Et quoniam Luna in Quadraturis, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus $23\frac{1}{2}$ verſatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor ſit, idque (quantum ſentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum ſinus ille ſit ad radium ut 91706 ad 100000) erit $\frac{841}{1000} L$, & ſumma virium in Syzygiis erit $L + S$, ac differentia in Quadraturis $\frac{841}{1000} L - S$, adeoque $L + S$ erit ad $\frac{841}{1000} L - S$ ut 45 ad 25 ſeu 9 ad 5, & inde $5L + 5S$ æqualis erit $\frac{7569}{1000} L - 9S$, &

14*S*

14 S æqualis $\frac{2569}{1000}$ L, & propterea L ad S ut 14000 ad 2569 ſeu $5\frac{7}{15}$ ad 1. In Portu *Plymuthi* æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim, altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in Syzygiis Lunæ ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis pedibus ſeptem vel octo. Si exceſſus mediocris his temporibus ſit pedum ſeptem cum dimidio; æſtus in Syzygiis aſcendet ad pedes $19\frac{3}{4}$, in Quadraturis ad pedes $12\frac{1}{4}$, & ſic $L + S$ erit ad $\frac{841}{1000}$ $L - S$ ut $19\frac{3}{4}$ ad $12\frac{1}{4}$, & inde L ad S ut 734 ad 100 ſeu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Eſt igitur vis Lunæ ad vim Solis per computationem priorem ut $5\frac{7}{15}$ ad 1, per poſteriorem ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Donec aliquid certius ex Obſervationibus accuratius inſtitutis conſtiterit, uſurpabimus proportionem mediocrem $6\frac{1}{3}$ ad 1. Unde cum vis Solis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum aſcendat, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem latè patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit æſtus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quàm in Zonis temperatis, propter anguſtiam Maris inter *Africam* & Auſtralem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit aſcendere niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in Inſulis, quæ à littoribus longiſſimè abſunt, perexiguus eſſe ſolet. In Portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca

 vado-

vadoſa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus ſunt ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa Milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora verò quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quàm quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum eſt ad Solis vim conſimilem ut $6\frac{1}{3}$ ad 1, & vires illæ ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; erit denſitas Lunæ ad denſitatem Solis ut $6\frac{1}{3}$ ad 1 directè & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inversè, id eſt (cum diametri mediocres apparentes Solis & Lunæ ſint 31′. 27″. & 32′. 12″.) ut 34 ad 5. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ ut 680 ad 387, ſeu 9 ad 5 quam proximè. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quàm Terra noſtra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ ſit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad $3,6\frac{1}{2}$, erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ ut 1 ad 26 quam proximè.

Corol.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi duplo minor quàm gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

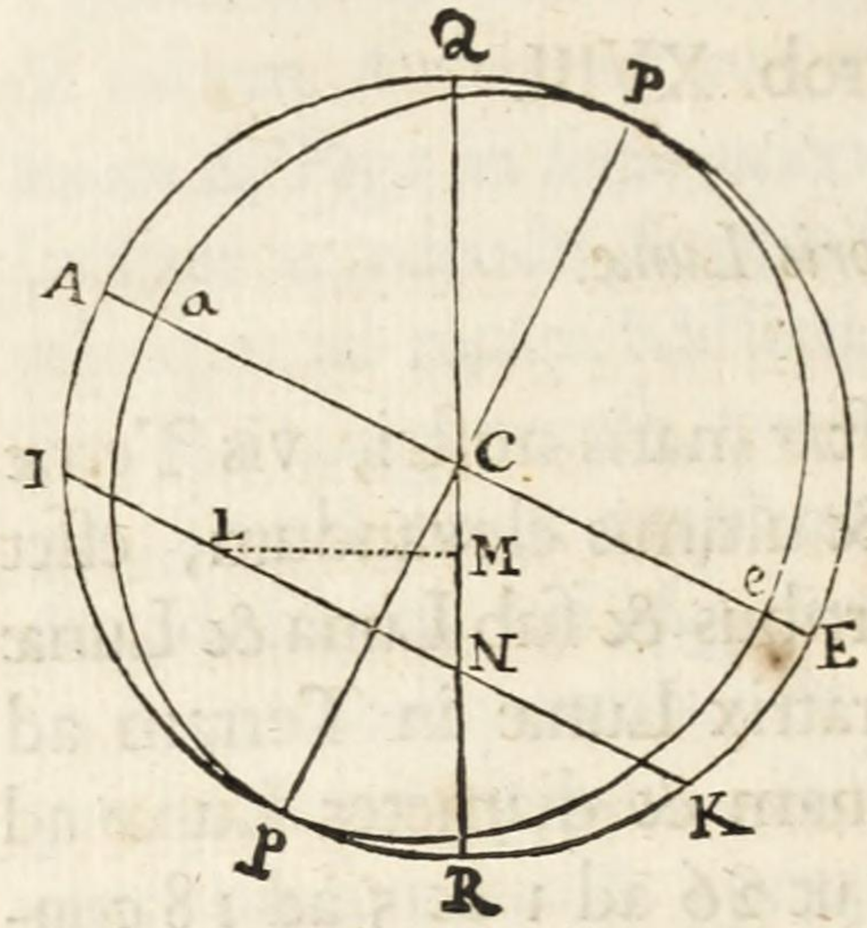
Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id eſt ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim ſeu 65 ad 9. Unde cum mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Eaque de cauſa figura Lunæ Sphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum Terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem ſuperius allatam reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in Terram converti.

Lemma I.

Si APEp *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & ſi centro* C *radio* CP *deſcribi intelligatur ſphæra* Pape; *ſit autem* QR *planum, cui recta à cen-*

tro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris P a p A P e p E, *quæ Sphærâ modò descriptâ altior est, particulæ singulæ conantur recedere hinc inde à plano* Q R, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: erit vis & efficacia tota particularum omnium, ad Terram circulariter movendam, quadruplo minor quàm vis tota particularum totidem in Æquatoris circulo* A E, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam. Et motus iste circularis circa axem in plano* Q R *jacentem, & axi* P p *perpendiculariter insistentem, peragetur.*



Sit enim *I K* circulus minor Æquatori *A E* parallelus, sitque *L* particula Terræ in circulo illo extra globum *P a p e* sita. Et si in planum *Q R* demittatur perpendiculum *L M*, vis tota particulæ illius ad Terram circa ipsius centrum convertendum proportionalis erit eidem *L M*: & si hæc vis *L M* (per Legum Corol. 2.) distinguatur in vires *L N*, *N M*; efficacia virium *M N* particularum omnium *L*, in circuitu Terræ totius extra globum *P a p e* consistentium, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem literarum *A p E P* convertendam, erit ad efficaciam virium *L N* particularum omnium *L*, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem contrarium earundem literarum convertendam, ut tria ad duo. Ideoque efficacia virium omnium *M N* erit ad excessum efficaciæ hujus supra efficaciam virium omnium *L N* ut tria ad unum. Et si particulæ illæ omnes locarentur in Æquatore, efficacia virium omnium *L N* evanesceret, & efficacia virium omnium *M N* augeretur in ratione quatuor ad tria. Quare excessus ille, qui est efficacia absoluta particularum in locis propriis, est pars quarta efficaciæ particularum earundem in Æquatore. Motus autem æquinoctiorum

ctiorum eſt ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati conſulo.

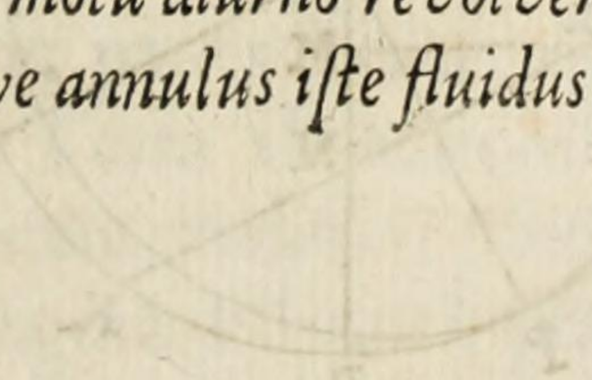
Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione compoſita ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque, ad duo quadrata ex diametro; id eſt in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *&* 1000000.

Eſt enim motus Cylindri circa axem ſuum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

Lemma III.

Si annulus, Terra omni reliqua ſublata, ſolus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materia rigida & firma conſtaret.*



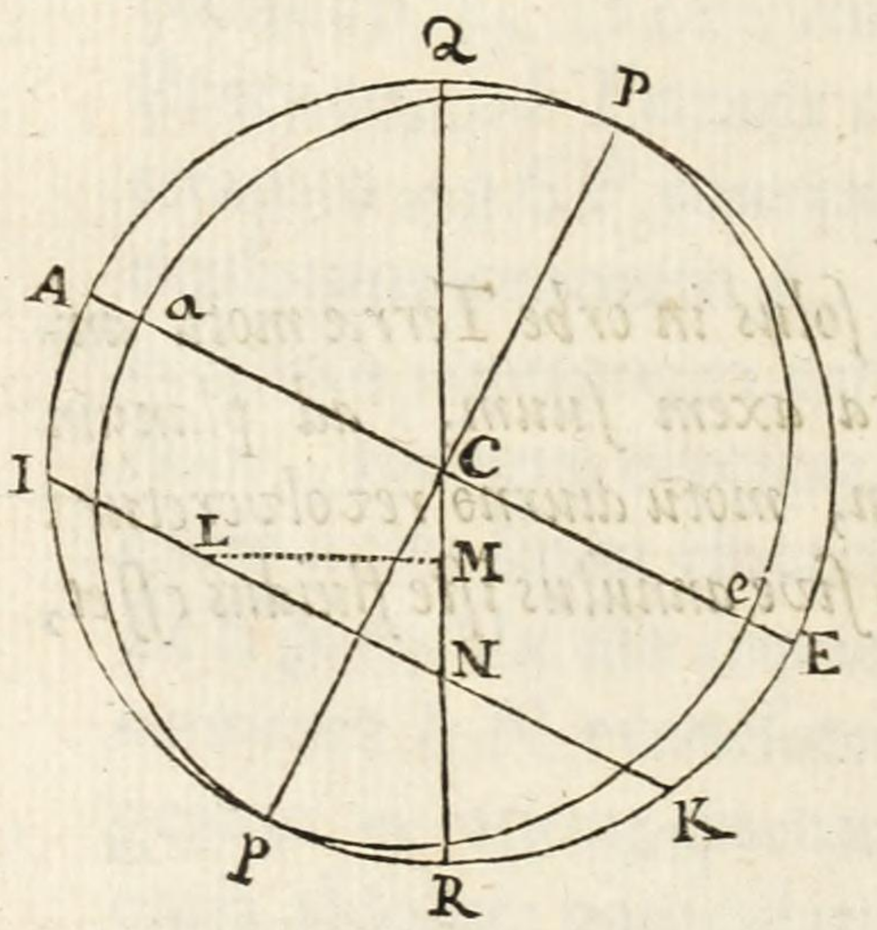
Prop.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, erat $16''.35'''.16^{iv}.36^{v}$. & hujus dimidium $8''.17'''.38^{iv}.18^{v}$. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto ſidereo 20 *gr.* 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20 *gr.* 11′. 46″. in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ motus Nodorum cujuſque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent reciprocè ut tempora periodica; & propterea ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut dies ſidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id eſt ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuò non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

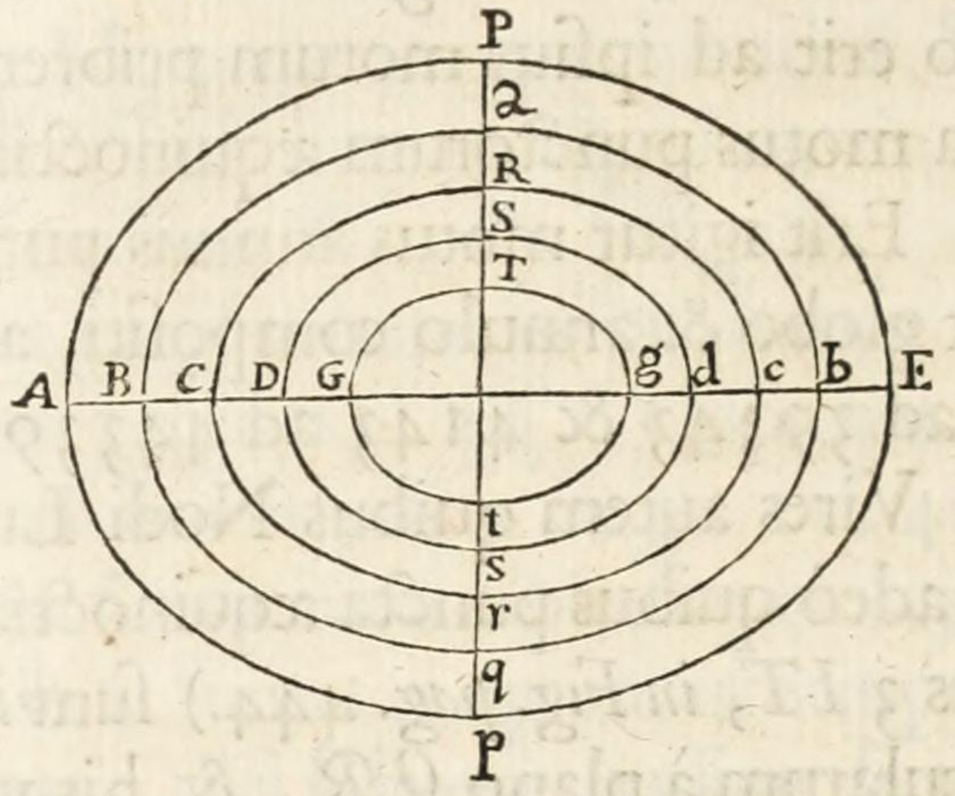
Fingamus igitur quod annulus iſte quoad quantitatem materiæ æqualis ſit Terræ omni *P a p A P e p E*, quæ globo *P a p E* ſuperior eſt; & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut *a C qu.* ad *A C qu.* — *a C qu.* id eſt (cum Terræ diameter minor *P C* vel *a C* ſit ad diametrum majorem *A C* ut 689 ad 692) ut 4143 ad 474721 ſeu 1000 ad 114584; ſi annulus iſte Terram ſecundum æquatorem cingeret, & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hu-



hujus **Lem. II.**) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt ut 4143 ad 439248 : ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443391. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum, quo ipſius Nodi ſeu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet : motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem ut 4143 ad 443391 ; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compoſiti, ad motum 20*gr.* 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391 conjunctim, id eſt ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut ſupra explicui) atque adeò quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id eſt vires 3 *IT*, *in Fig. pag.* 444.) ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt ; & propterea (per Lem. I.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad ſuperiorem illam Terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quàm prius. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad 20*gr.* 11′. 46″. ut 1 ad 11728, ac proinde fieret 6″. 12‴. 2^{iv}. Hæc eſt præceſſio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis ut $6\frac{1}{3}$ ad 1, & hæc vis pro quantitate ſua augebit etiam præceſſionem Æquinoctiorum. Ideoque præceſſio illa ex utraque cauſa oriunda jam fiet major in ratione $7\frac{1}{3}$ ad 1, & ſic erit 45″. 24‴. 15^{iv}. Hic eſt motus punctorum æquinoctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ globo *Pape* incumbunt, oriundus. Nam Terra ab actionibus illis in globum ipſum exercitis nullam in partem inclinari poteſt.

Deſignet jam *APEp* corpus Terræ figurâ Ellipticâ præditum, & ex uniformi materiâ conſtans. Et ſi diſtinguatur idem in figuras innumeras Ellipticas concentricas & conſimiles, *APEp*, *BQbq*, *CRcr*,

CRcr, *DSds*, &c. quarum diametri ſint in progreſſione Geometrica: quoniam figuræ conſimiles ſunt, vires Solis & Lunæ, quibus puncta æquinoctialia regrediuntur, efficerent ut figurarum reliquarum ſeorſim ſpectatarum puncta eadem æquinoctialia eadem cum velocitate regrederentur. Et par eſt ratio motus orbium ſingulorum *AQEq*, *BRbr*, *CScs*, &c. qui ſunt figurarum illarum differentiæ. Orbis uniuſcujuſque, ſi ſolus eſſet, puncta æquinoctialia eadem cum velocitate regredi deberent. Nec refert utrum orbis quilibet denſior ſit an rarior, ſi modò ex materia uniformiter denſa confletur. Unde etiam ſi orbes ad centrum denſiores ſint quàm ad circumferentiam, idem erit motus æquinoctiorum Terræ totius ac prius; ſi modo orbis unuſquiſque ſeorſim ſpectatus ex materia uniformiter denſa conſtet, & figura orbis non mutetur. Quod ſi figuræ orbium mutentur, Terraque ad æquatorem *AE*, ob denſitatem materiæ ad centrum, jam altius aſcendat quàm prius; regreſſus æquinoctiorum ex aucta altitudine augebitur, idque in orbibus ſingulis ſeorſim exiſtentibus, in ratione majoris altitudinis materiæ juxta orbis illius æquatorem; in Terra autem tota in ratione majoris altitudinis materiæ juxta æquatorem orbis non extimi *AQEq*, non intimi *Gg*, ſed mediocris alicujus *CScs*. Terram autem ad centrum denſiorem eſſe, & propterea ſub Æquatore altiorem eſſe quàm ad polos in majore ratione quàm 692 ad 689, in ſuperioribus inſinuavimus. Et ratio majoris altitudinis colligi ferè poteſt ex majore diminutione gravitatis ſub æquatore, quàm quæ ex ratione 692 ad 689 conſequi debeat. Exceſſus longitudinis penduli, quod in Inſula *Goree* & in illâ *Cayennæ* minutis ſingulis ſecundis oſcillatur, ſupra longitudinem Penduli quod *Pariſiis* eodem tempore oſcillatur, à



Gallis

Gallis inventi ſunt pars decima & pars octava digiti, qui tamen ex proportione 692 ad 689 prodiere $\frac{81}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$. Major eſt itaque longitudo Penduli *Cayennæ* quàm oportet, in ratione $\frac{1}{8}$ ad $\frac{8}{10.0}$, ſeu 1000 ad 712; & in Inſula *Goree* in ratione $\frac{1}{10}$ ad $\frac{81}{1000}$ ſeu 1000 ad 810. Si ſumamus rationem mediocrem 1000 ad 760; minuenda erit gravitas Terræ ad æquatorem, & ibidem augenda ejus altitudo, in ratione 1000 ad 760 quam proximè. Unde motus æquinoctiorum (ut ſupra dictum eſt) auctus in ratione altitudinis Terræ, non ad orbem extimum, non ad intimum, ſed ad intermedium aliquem, id eſt, non in ratione maxima 1000 ad 760, non in minima 1000 ad 1000, ſed in mediocri aliqua, puta 10 ad 8; vel 6 ad 5, evadet annuatim 54″. 29‴. 6ʸ.

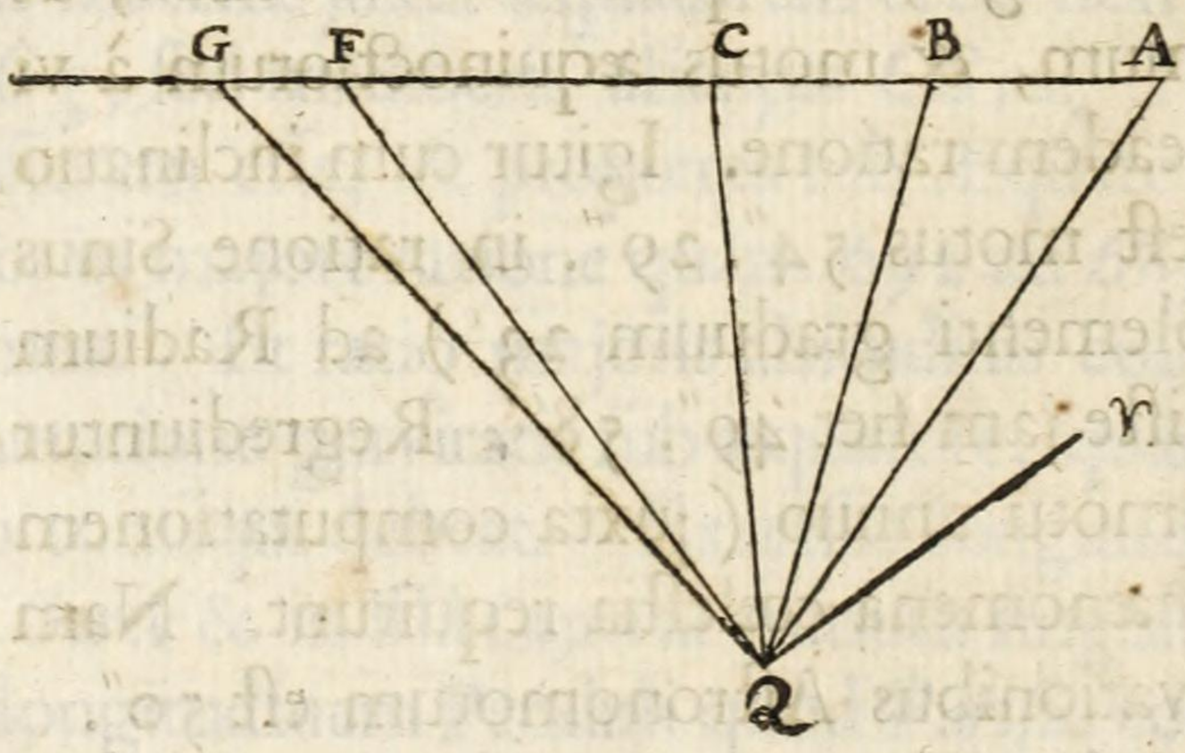
Rurſus hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Ecliptícæ, minuendus eſt, idque in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Nam diſtantia particulæ cujuſque terreſtris à plano ♋♑, quo tempore particula illa à plano Ecliptícæ longiſſimè diſtat, in Tropico ſuo (ut ita dicam) conſiſtens, diminuitur, per inclinationem planorum Ecliptícæ & Æquatoris ad invicem, in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Et in ratione diſtantiæ illius diminuitur etiam vis particulæ ad æquinoctia movenda. In eadem quoque ratione diminuitur ſumma virium particulæ ejuſdem, in locis hinc inde à Tropico æqualiter diſtantibus: uti ex prædemonſtratis facilè oſtendi poſſit: & propterea vis tota particulæ illius, in revolutione integrâ, ad æquinoctia movenda, ut & vis tota particularum omnium, & motus æquinoctiorum à vi illa oriundus, diminuitur in eadem ratione. Igitur cum inclinatio illa ſit $23\frac{1}{2}$ *gr.* diminuendus eſt motus 54″. 29‴. in ratione Sinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iſte jam fiet 49″. 58‴. Regrediuntur igitur puncta æquinoctiorum motu annuo (juxta computationem noſtram) 49″. 58‴, fere ut Phænomena cœleſtia requirunt. Nam regreſſus ille annuus ex obſervationibus Aſtronomorum eſt 50″.

Deſcripſimus jam Syſtema Solis, Terræ & Planetarum; ſupereſt ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

Lemma IV.

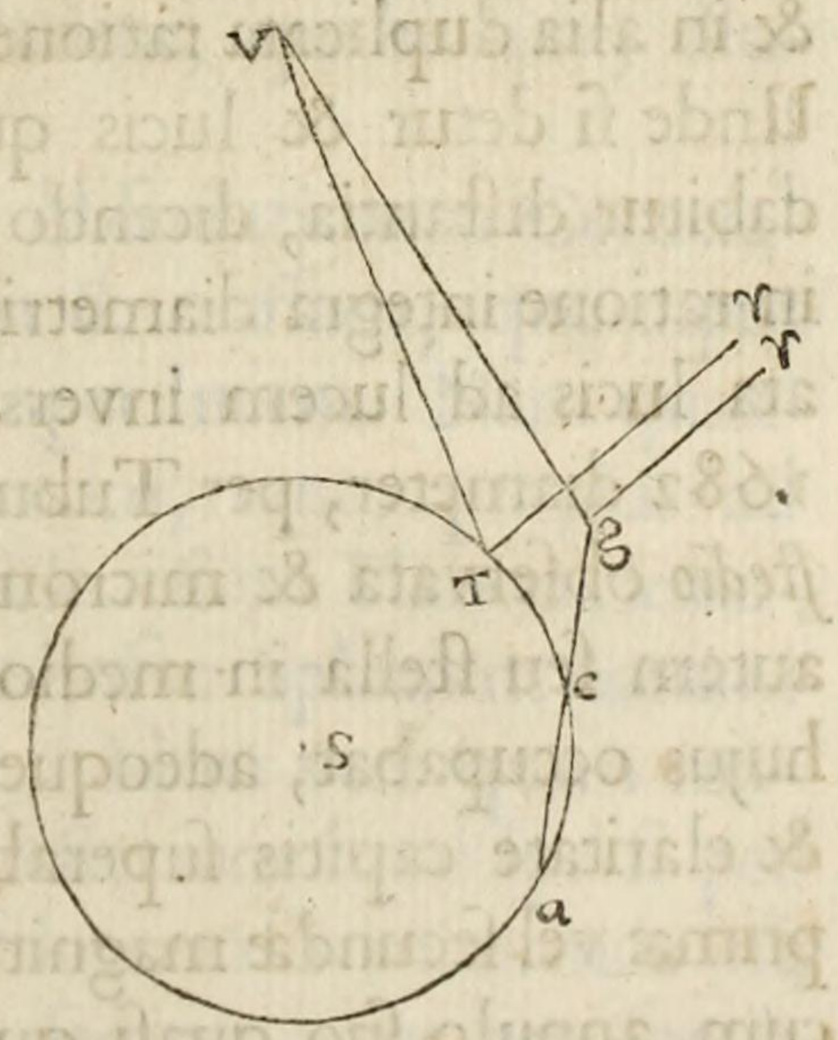
Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs moveri videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur.



Sunto ♈ ☌ *A*, ♈ ☌ *B*, ♈ ☌ *C* observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque ♈ ☌ *F* longitudo ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta *A B C*, cujus partes *A B*, *B C* rectis ☌ *A* & ☌ *B*,

QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam, ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus γQG longitudo Cometæ tempore Obſervationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo AQG, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terra, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modò expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia verò Cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet S Solem, $a\,c\,T$ orbem magnum, a locum Terræ in obſervatione prima, c locum Terræ in obſervatione ſecunda, T locum Terræ in obſervatione ultima, & $T\gamma$ lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus γTV æqualis angulo γQF, hoc eſt æqualis longitudini Cometæ ubi Terra verſatur in T. Jungatur $a\,c$, & producatur ea ad g, ut ſit $a\,g$ ad $a\,c$ ut AG ad AC, & erit g locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta $a\,c$ uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur $g\gamma$ ipſi $T\gamma$ parallela, & capiatur angulus γgV angulo γQG æqualis, erit hic angulus γgV



æqualis longitudini Cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior eſſe ſolet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex Parallaxi, propterea quod reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas meo computo collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directè & ratione dimidiata lucis ad lucem inversè. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum ſexdecim pedum à *Cl. Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis ſuperabit caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, adeoque lux globi & annuli con-

conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantiæ Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad √ 4 inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut Author est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter Capillitii Cometarum rarò superet 8′ vel 12′, diameter verò Nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel fortè decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certè ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hic sunt, illustrantur à Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis à se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus à Capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad

Nu-

Nucleum capitis. Igitur ſi imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra diſcum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò proprior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante *Hevelio*,) ex quo conſpici cæpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor verò capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine Menſis *Julii* ubi primum conſpectus eſt, tardiſſimè movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ inclusâ comâ, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Menſis *Decembris*, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere

ſep-

ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decem.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decem.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parùm, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum à Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decem.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decem.* 26. velociſſimè motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à Terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maximè ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſimè moventur, atque adeo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à ſe reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum deberent ſæpius apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus verſarentur, & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in Hemiſphærio Solem verſus, quàm in Hemiſphærio oppoſito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum

mirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à Sole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quàm ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere Terræ quod Solem reſpicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui Planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos etiam contra curſum Planetarum diutiſſimè conſervant. Fallor ni genus Planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmoſphæris ingentibus cinguntur; & Atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt non ipſa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic Terra ſi è Planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus prope deliteſceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, ſitum mutant inter ſe, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum ſub Atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

Cometas in Sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc ſi Cometæ in orbem redeunt, orbes erunt Ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione ſequialtera tranſverſorum axium. Ideoque Cometæ maxima

xima ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis Cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ abſque erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſunt.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ diſtantiæ Cometæ à centro Solis ad diſtantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu Ellipſeos in qua Terra revolvitur ſemidiametrum tranſverſam, eſſe partium 100000000, & Terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole diſtantia mediocri, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione diſtantiarum reſpectivè, ideoque datur.

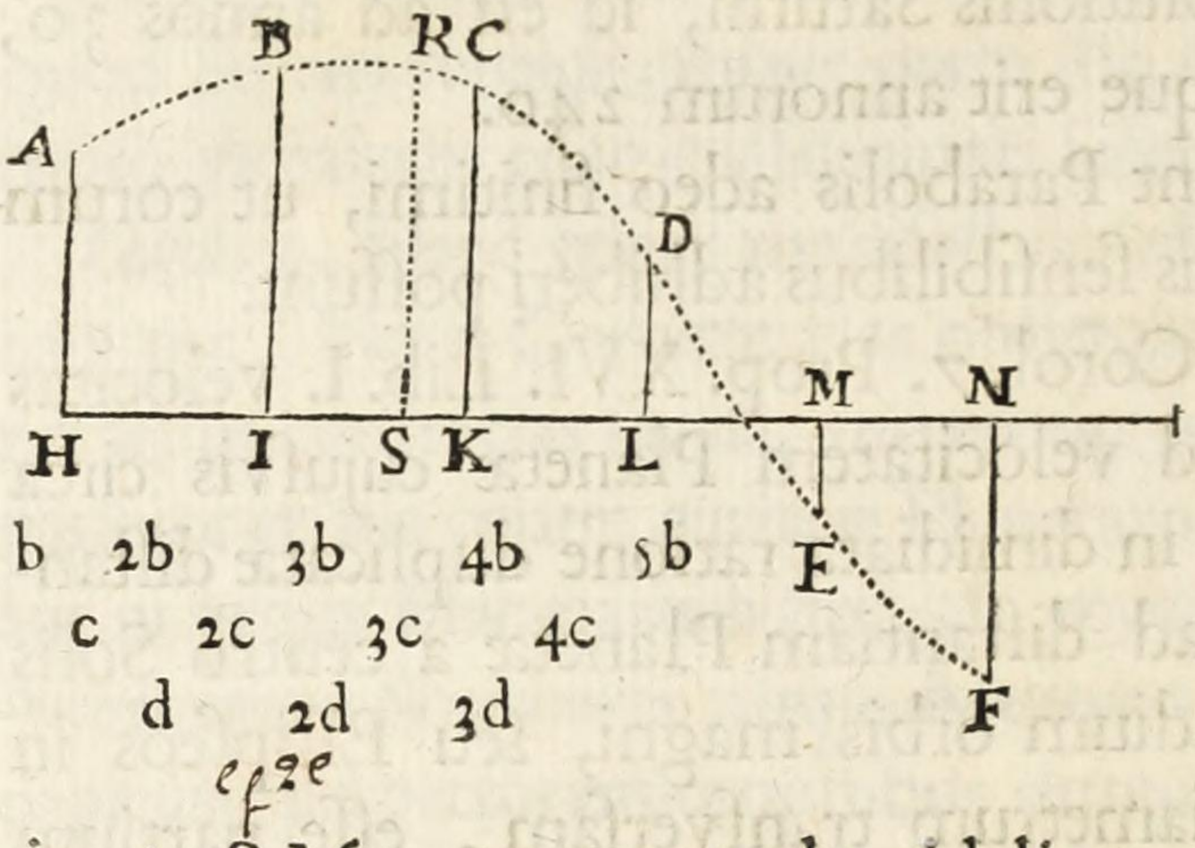
Lemma V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Caſ. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia ſunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK* &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. ſecundas *c*,

2 *c*, 3 *c*, 4 *c*, &c. tertias *d*, 2 *d*, 3 *d*, &c. id eſt, ita ut ſit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $- HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $- IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+ SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+ SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+ SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis erit $RS = a + bp, + cq + dr + es + ft$ &c.



Caſ. 2. Quod ſi punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas *b*, 2 *b*, 3 *b*, 4 *b*, 5 *b*; ſecundas per intervalla bina diviſas *c*, 2 *c*, 3 *c*, 4 *c*, &c. tertias per intervalla terna diviſas *d*, 2 *d*, 3 *d*, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas *e*, 2 *e*, &c. & ſic deinceps; id eſt ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ &c. Poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$ $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $- HS = p$, p in $- IS = q$, q in $+ SK = r$, r in $+ SL = S$, S in $+ SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot,

quot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proximè cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per Methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

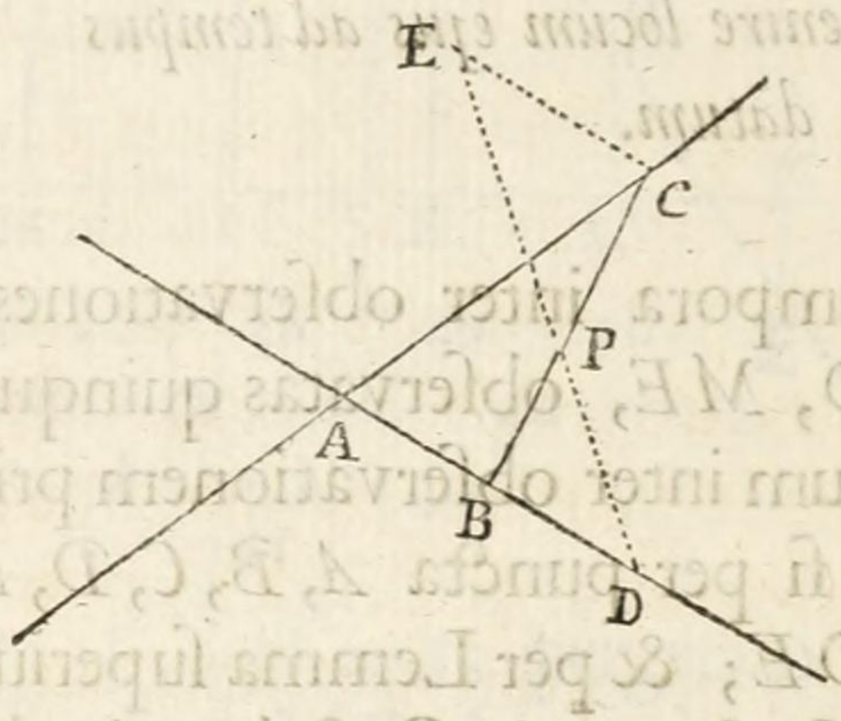
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes, (*in Fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME, observatas quinque longitudines Cometæ, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

Lemma VII.

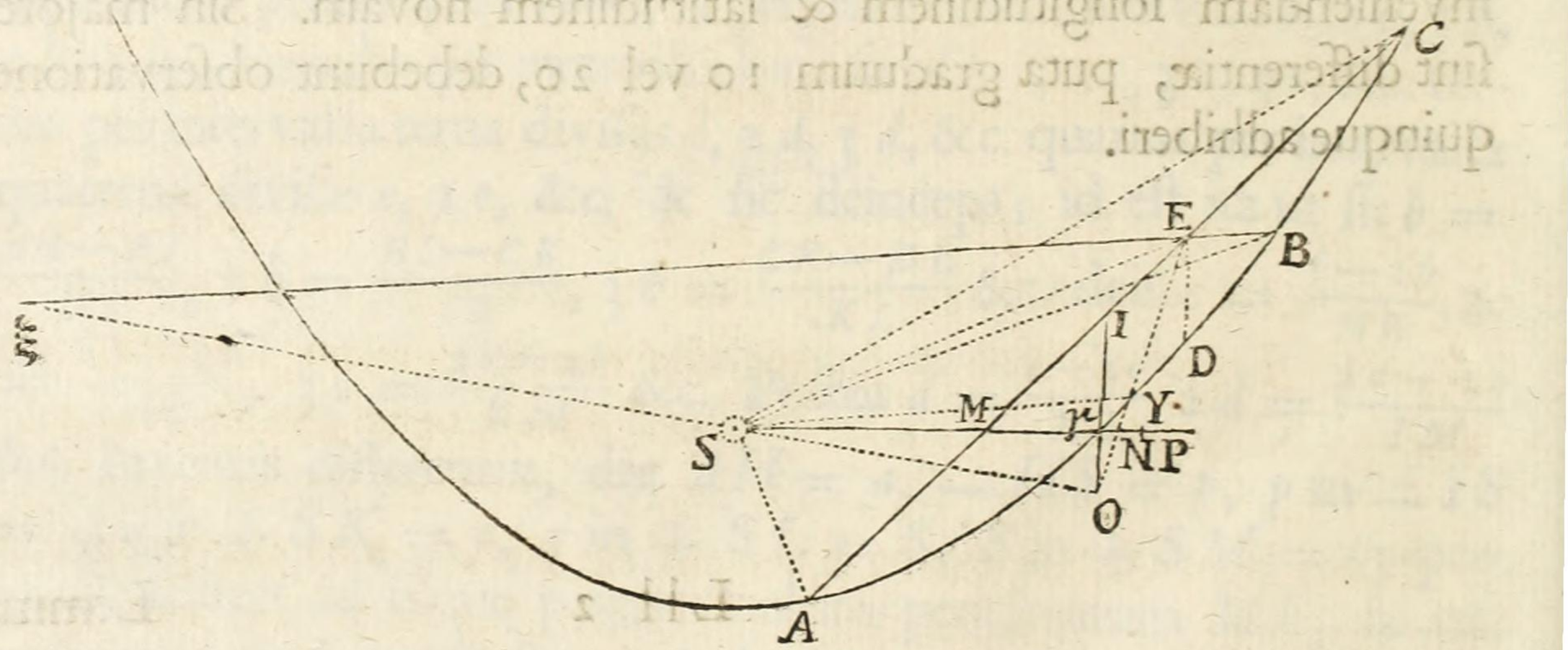
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*

Lemma VIII.

Sit ABÇ *Parabola umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *bisectâ in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ. *In* Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS, *&*



producatur ea ad ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet*

ſcindet de chorda A C *ſegmentum* A E *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *E O* ſecans arcum Parabolicum *A B C* in *ϒ*, & erit area curvilinea *A E ϒ* ad aream curvilineam *A C ϒ* ut *A E* ad *A C* quamproximè. Ideoque cum triangulum *A S E* ſit ad triangulum *A S C* in eadem ratione, erit area tota *A S E ϒ* ad aream totam *A S C ϒ* ut *A E* ad *A C* quamproximè. Cum autem *ξ O* ſit ad *S O* ut 3 ad 1 & *E O* ad *ϒ O* prope in eadem ratione, erit *S ϒ* ipſi *E B* parallela quamproximè, & propterea triangulum *S E B*, triangulo *ϒ E B* quamproximè æquale. Unde ſi ad aream *A S E ϒ* addatur triangulum *E ϒ B*, & de ſumma auferatur triangulum *S E B*, manebit area *A S B ϒ* areæ *A S E ϒ* æqualis quamproximè, atque adeo ad aream *A S C ϒ* ut *A E* ad *A C*. Sed area *A S B ϒ* eſt ad aream *A S C ϒ* ut tempus deſcripti arcus *A B* ad tempus deſcripti arcus totius. Ideoque *A E* eſt ad *A C* in ratione temporum quamproximè. *Q. E. D.*

Lemma IX.

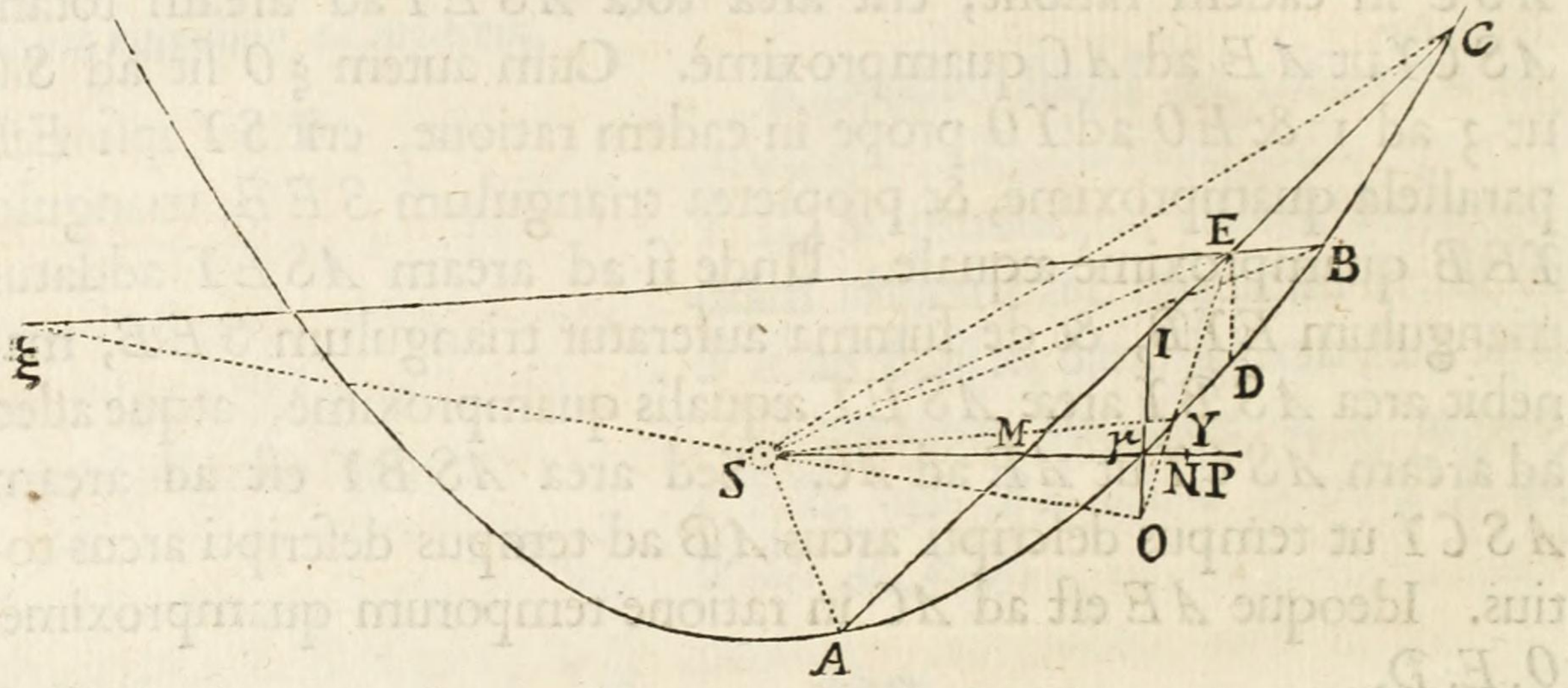
Rectæ I μ *&* μ M *&* *longitudo* $\frac{A\,I\,C}{4\,S\,\mu}$ *æquantur inter ſe. Nam* 4 S μ *eſt latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem* B.

Lemma X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *ſit pars tertia ipſius* μ I, *&* S P *ſit ad* S N *ut* S N *ad* S μ. *Cometa quo tempore deſcribit arcum* A μ C, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* S P *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* A C.

Nam ſi velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrediatur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam Radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ Parabolicæ *A S C* μ. Ideoque contentum ſub longitudine in Tangente deſcripta

ſcripta & longitudine $S\mu$, eſſet ad contentum ſub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum $ASCM$, id eſt ut SN ad SM. Quare AC eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas Cometæ in altitudine SP ſit ad velocitatem in altitudine $S\mu$ in dimidiata ratione SP ad $S\mu$



inversè, id eſt in ratione $S\mu$ ad SN, longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in Tangente deſcriptam ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in Tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproximè.

Lemma XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem qua urgetur ſub initio; idem quo tempore in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore deſcribat arcum Parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine SP (per

Lemma

Lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, adeoque eodem tempore in circulo cujus ſemidiameter eſſet SP revolvendo, deſcriberet arcum cujus longitudo eſſet ad arcus Parabolici chordam AC in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in Solem, deſcriberet eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eſt ſpatium $\frac{AIq.}{4.SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in Solem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq.}{4S\mu}$, id eſt ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

Prop. XLI. Prob. XX.

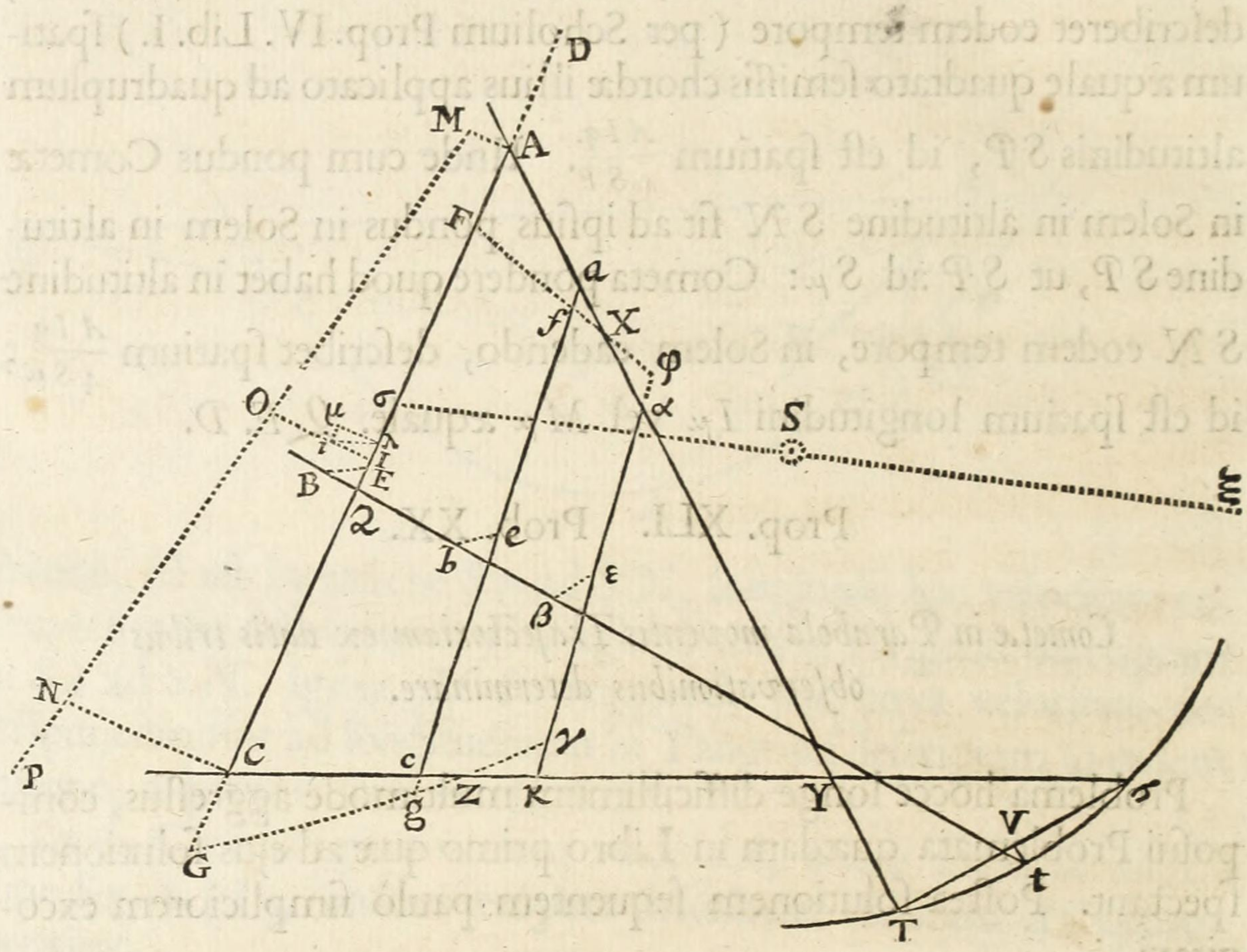
Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulò ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, TA, $t\mathcal{B}$, τC obſervatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter obſervationem primam & ſecundam, W tempus inter ſecundam ac ter-

tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, & $t V$ perpendiculum in chordam $T\tau$. In longitudine media $t B$ sumatur utcunque punctum B, & inde versus Solem S



ducatur linea $B E$, quæ sit ad Sagittam $t V$ ut contentum sub $S B$ & $S t$ quadrato ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt $S B$ & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium $t B$. Et per punctum E agatur recta $A E C$, cujus partes $A E$, $E C$ ad rectas $T A$ & τC terminatæ, sint ad invicem ut tempora V & W: Tum per puncta A, B, C, duc circumferentiam circuli, eamque biseca in i, ut & chordam $A C$ in I. Age occultam $S i$ secantem $A C$ in λ, & comple parallelogrammum $i I \lambda \mu$. Cape $I \sigma$ æqualem $3 I \lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma \xi$ æqualem $3 S \sigma + 3 i \lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B versus punctum ξ duc occultam

cultam novam BE, quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3} i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem ut tempora inter observationes, V & W.

Ad AC bisectam in I erigantur perpendicula AM, CN, $I0$, quarum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & $\tau\alpha$. Jungatur MN secans $I0$ in 0. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$, & agatur occulta $0D$. Deinde in MN versus N capiatur MP, quæ sit ad longitudinem supra inventam X in dimidiata ratione mediocris distantiæ Telluris à Sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam $0D$. Et in AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ε, α, $\varkappa$, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$ secans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Ecliptice. Et si in AC, ac, $\alpha\varkappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipsis CG, cg, $\varkappa\gamma$ respectivè æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$ secans rectam AT in X; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Ecliptice. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemma VIII: & BE per Lem. XI. sit pars rectæ BS in plano Ecliptice arcui ABC & chordæ AEG interjecta; & MP (per Lem. VIII.) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modò B sit verus Cometæ locus in plano Ecliptice.

Cæterum puncta B, b, β non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt in quo veſtigium orbis in plano Ecliptícæ deſcriptum ſecabit rectam tB præterpropter innoteſcat, in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}Tt$ in dimidiata ratione St ad SQ. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B quod prima vice uſurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine MP; in tB capiatur punctum b, ea lege, ut ſi TA, TC ſe mutuò ſecuerint in Υ, ſit diſtantia Υb ad diſtantiam ΥB in ratione compoſitâ ex ratione MN ad MP & ratione dimidiata SB ad Sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β; ſi modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia Bb perexigua obvenerit, poſtquam inventa ſunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg ſecabunt TA & τC in punctis quæſitis X & Z.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum Tabula ſequens exhibet.

		Tem. appar	Temp. verũ	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
1680 *December*	12	4.46	4.46.00	♑ 1.53. 2	♒ 6.33. 0	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 8.10	♓ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14.10.49	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16.10.38	28.24. 6	27.00.57
	29	7.55	8.03. 2	19.20.56	♈ 13.11.45	28.10.05
	30	8. 2	8.10.26	20.22.20	17.37. 5	28.11.12
1681 *January*	5	5.51	6. 1.38	26.23.19	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29.54	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.28.34	20.40.57	23.44.00
	13	6.56	7. 8.55	4.34. 6	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.58	♉ 9.55.48	17.56.54
	30	8.07	8.21.53	21.50. 9	♉ 13.19.36	16.40.57
February	2	6.20	6.34.51	24.47. 4	15.13.48	16.02.02
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

In

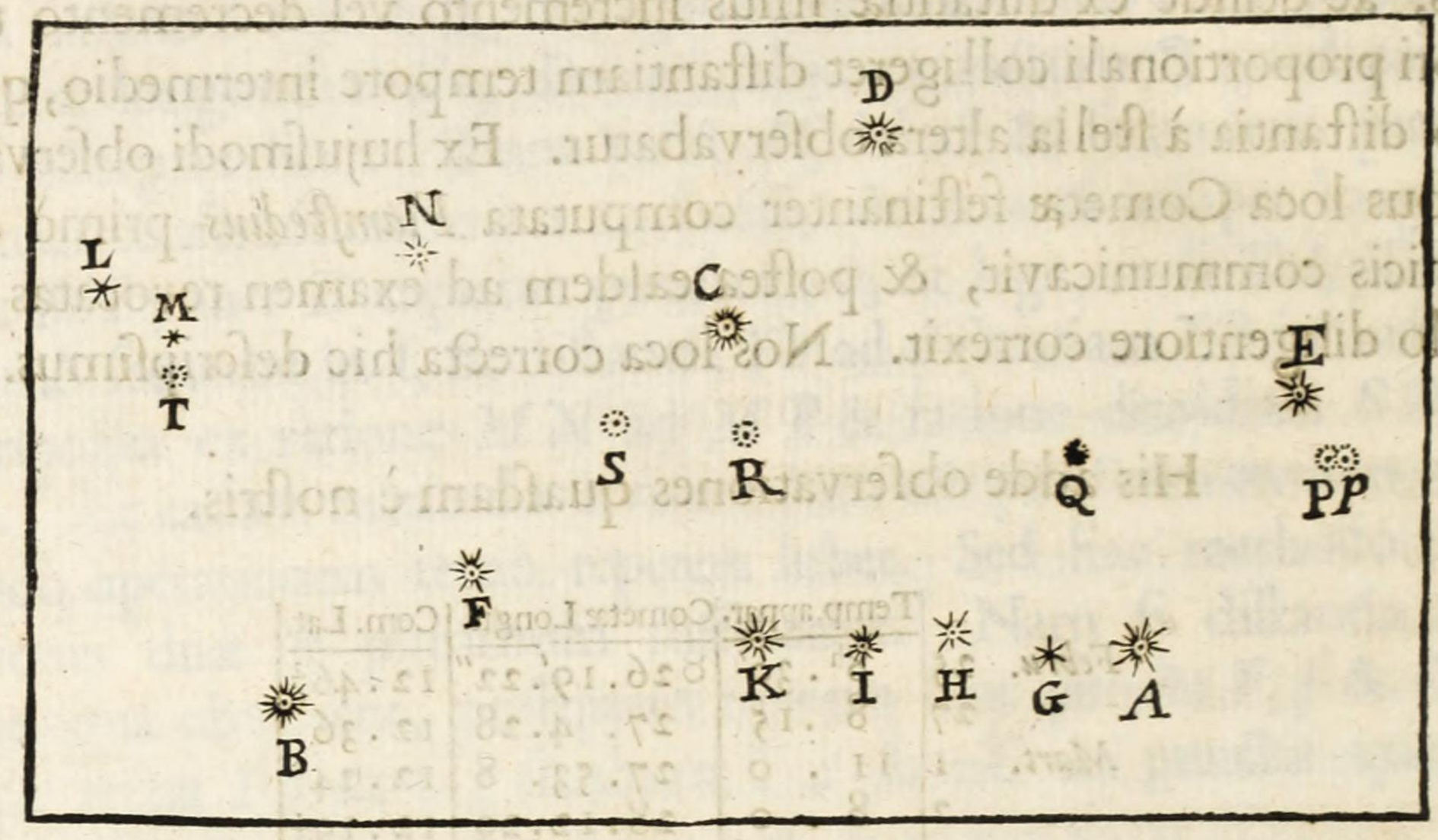
In his obſervationibus *Flamſtedius* eâ uſus eſt diligentiâ, ut poſtquam bis obſervaſſet diſtantiam Cometæ à Stella aliqua fixa, deinde etiam diſtantiam bis ab alia ſtella fixa, rediret ad ſtellam priorem & diſtantiam Cometæ ab eadem iterum obſervaret, idque bis, ac deinde ex diſtantiæ illius incremento vel decremento tempori proportionali colligeret diſtantiam tempore intermedio, quando diſtantia à ſtella altera obſervabatur. Ex hujuſmodi obſervationibus loca Cometæ feſtinanter computata *Flamſtedius* primò cum amicis communicavit, & poſtea eaſdem ad examen revocatas calculo diligentiore correxit. Nos loca correcta hic deſcripſimus.

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

		Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febru.	25	$8^h.30'$	♉ 26.19'.22"	$12.46\frac{7}{8}$
	27	8 .15	27. 4.28	12.36
Mart.	1	11 . 0	27.53. 8	$12.24\frac{3}{7}$
	2	8 . 0	28.12.29	$12.19\frac{1}{2}$
	5	11 .30	29.20.51	$12. 2\frac{2}{3}$
	9	8 .30	♊ 0.43. 2	$11.44\frac{3}{5}$

Hæ obſervationes Teleſcopio ſeptupedali, & Micrometro filiſque in foco Teleſcopii locatis paractæ ſunt: quibus inſtrumentis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones Cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero o*) *B* ſtellam ſequentem in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $53\frac{5}{11}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* exiſtentis diſtantia à ſtella *E* erat major quàm $\frac{3}{13}$ *AE*, minor quàm $\frac{1}{5}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{3}{14}$ *AE* proximè; & angulus *Ap E* nonnihil



obtuſus erat, ſed fere rectus. Nempe ſi demitteretur ad *p E* perpendiculum ab *A*, diſtantia Cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *p E*.

Eadem nocte, horâ $9\frac{1}{2}$, Cometæ in $\mathcal{P}$ exiſtentis diſtantia à ſtella *E* erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *AE*, ſeu $\frac{8}{39}$ *AE* quamproximè. A perpendiculo autem à Stella *A* ad rectam $\mathcal{P}$ *E* demiſſo diſtantia Cometæ erat $\frac{4}{5}$ $\mathcal{P}$ *E*.

Die δ^{tis}, *Mart.* 1, hor. 11. P. M. Cometa in $\mathcal{R}$ exiſtens, ſtellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *C* $\mathcal{R}$ *K* pars *C* $\mathcal{R}$ paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ *CK*, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{8}$ *C* $\mathcal{R}$, adeoque æqualis $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{16}$ *C* $\mathcal{R}$ ſeu $\frac{16}{45}$ *CK*.

Die ς^{ii}, *Mart.* 2. hor. 8. P. M. Cometæ exiſtentis in *S*, diſtantia à ſtella *C* erat $\frac{4}{9}$ *FC* quamproximè. Diſtantia ſtellæ *F* à recta *CS* producta erat $\frac{1}{24}$ *FC*; & diſtantia ſtellæ *B* ab eadem recta erat quintuplo major quàm diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tran-

tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quàm ſtellæ *I*.

Die ♄ni, *Mart.* 5. hor. 11½. P. M. Cometa exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat ½ *ML*, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quàm *B*, auferens à *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per Teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes (poſito quod ſtellarum *A* & *B* diſtantia eſſet 2 *gr.* 6⅘, & ſtellæ *A* longitudo ♉ 26 *gr.* 41′. 48″ & latitudo borealis 12 *gr.* 8′½, ſtellæque *B* longitudo ♉ 28 *gr.* 40′. 16″. & latitudo borealis 11 *gr.* 17⅕; quemadmodum à *Flamſtedio* obſervatas accepi) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre conſtructâ uſus ſum, ſed Longitudinum tamen & Latitudinum errores (quatenus ab obſervationibus noſtris oriantur) dimidium minuti unius primi vix ſuperant, præterquam in obſervatione ultimâ *Mart.* 9. ubi poſitiones fixarum ad ſtellas *A* & *B* minus accuratè determinare potui. *Caſſinus* qui Cometam eodem tempore obſervavit, ſe declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definiviſſe faſſus eſt. Nam Cometa (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cæpit boream verſus, à parallelo quem in fine Menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5. & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *Sμ* 9503, *iλ* = 413 : *BE* ſecunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* — 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam *tb* 5640. Et

per

per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus orbem definiendo inveni Nodos ejus in ☌ & ♈ 1 *gr.* 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Ecliptica 61 *gr.* $20\frac{1}{3}$; verticem ejus (seu perihelium Cometæ) in ♏ 27 *gr.* 43′ cum latitudine australi 7 *gr.* 34′; & ejus latus rectum 236,8, areamq; radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585; Cometam verò *Decemb.* 8 *d.* 0 *h.* 4′. P. M. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula Sinuum naturalium collectas determinavi graphicè; constructo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis $16\frac{1}{3}$ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

COMETÆ

	Distant. Cometæ à Sole	Lon. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
Decemb. 12	2792	♍ 6.32	8.18 $\frac{1}{2}$	♍ 6.33	8.26	— 2	— $7\frac{1}{2}$
29	8403	♐ 13.13$_3$	28. 0	♐ 13.11 $\frac{3}{4}$	28.10$_{1\frac{1}{2}}$	+ 2	— $10\frac{1}{2}$
Febr. 5	16669	♉ 17. 0	15.29 $\frac{2}{3}$	♉ 16.59 $\frac{7}{8}$	15.27 $\frac{2}{5}$	0	+ $2\frac{1}{5}$
Mar. 5	21737	♉ 29.19 $\frac{3}{4}$	12. 4	♉ 29.20 $\frac{6}{7}$	12. 2 $\frac{2}{3}$	— 1	+ $1\frac{1}{5}$

Præterea cum *Cl. Flamstedius* Cometam, qui Mense *Novembri* apparuerat, eundem esse cum Cometa mensium subsequentium, literis ad me datis aliquando disputaret, & Trajectoriam quandam ab orbe hocce Parabolico non longe aberrantem delinearet, visum est loca Cometæ in hoc orbe Mense *Novembri* computare, & cum Observationibus conferre. Observationes ita se habent.

Nov. 17. St. Vet. *Ponthæus* & alii hora sexta matutina *Romæ*, (id est hora 5. 10′ *Londini*) Cometam observarunt in ♎ 8 *gr.* 30′ cum latitudine Australi 0 *gr.* 40′. Extant autem eorum observationes in tractatu quem *Ponthæus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Galletius* etiam *Romæ*, Cometam vidit in ♎ 8 *gr.* sine Latitudine.

Nov.

Nov. 18. *Ponthæus* & Socii horâ matutinâ 6, 30′ *Romæ* (*i. e.* hor. 5. 40′ *Londini*) Cometam viderunt in ♎ 13½, cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 20′. Eodem die *R. P. Ango* in Academia *Flechenſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ, Cometam vidit in medio Stellarum duarum parvarum, quarum una media eſt trium in recta linea in Virginis Auſtrali manu, & altera eſt extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12 *gr.* 46′ cum Lat. Auſtr. 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova Anglia* in Lat. 42⅓, horâ quintâ matutinâ (id eſt *Londini* hora Mat. 9⅔) Cometa viſus eſt in ♎ 14 circiter, cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 30′; uti à *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora Mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à Spica ♍ quaſi 2 *gr.* Boreazephyrum verſus. Eodem die hor. 5. Mat. *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* Cometa diſtabat à Spica ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum exiſtente 40′, atque adeo differentia Long. 44′ circiter. Unde Cometa erat in ♎ 18 *gr.* 40′. cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 19′. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent* prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in Confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ *gr.* horâ quintâ matutinâ (id eſt horâ 10ª *Londini*) Cometam vidit ſupra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¾ *gr.* Obſervator idem, eadem horâ diei ſequentis, Cometam vidit quaſi 2 *gr.* inferiorem Spicâ. Congruent hæ obſervationes cum obſervationibus in *Nova Anglia* factis, ſi modò diſtantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore ſuperior eſſet Spica ♍ altitudine 52′ circiter, ac die poſteriore inferior eadem ſtellâ altitudine perpendiculari 2 *gr.* 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta Matutina, *Venetiis* (id eſt hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 *gr.* cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 30′. Eodem die *Boſtoniæ* diſtabat Cometa à Spica ♍, 4 *gr.* longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 *gr.* 24 circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & Socii hor. mat. 7¼ Cometam obſervarunt in ♎ 27 *gr.* 50′ cum Latitudine Auſtrali 1 *gr.* 16′. *Ango* horâ quintâ

quintâ mat. in ♎ 27 *gr.* 45′. *Montenarus* in ♎ 27 *gr.* 51′. Eodem die in Insulâ *Jamaicâ* visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est 1 *gr.* 59′.

Novem. 22. Visus est à *Montenaro* in ♏ 2°. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in ♏ 3 *gr.* circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde visus est à *Montenaro Novem.* 24. in ♏ 12 *gr.* 52′. & *Nov.* 25. in ♏ 17 *gr.* 45. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 *gr.* Eandem *Ponthæus* & *Galletius* decrevisse, *Montenarus* & *Ango* semper crevisse testantur. Crassæ sunt horum omnium observationes, sed eæ *Montenari*, *Angonis* & observatoris in *Nova-Anglia* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter se collatis, & ad meridianum *Londini*, hora mat. 5. 10′ reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproximè descripsisse.

		Long. Com.	Latit. Com.
Nov.	17	♎ 8.0	0.45 Austr.
	18	12.52	1. 2
	19	17.48	1.18
	20	22.45	1.32
	21	27.46	1.44
	22	♏ 2.48	1.55
	23	7.50	2. 4
	24	12.52	2.12
	25	17.45	2.18

Loca autem Cometæ iisdem horis in orbe Parabolico inventa ita se habent.

		Comet. Lon.	Com. Lat.
Nov.	17	♎ 8. 3	0.23 *A*
	21	♎ 28. 0	1.22 *A*
	25	♏ 18. 17	2. 6 *A*

Congruunt igitur observationes tam mense *Novembri*, quam mensibus tribus subsequentibus cum motu Cometæ circa Solem in Trajectoriâ hacce Parabolicâ, atque adeo hanc esse veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca observata

ſervata & loca computata tam ex erroribus obſervationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admiſſis, facilè oriri potuere.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ opticè delineatas exhibere: obſervationibus ſequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. cauda 30 *gr.* longa, Solique directe oppoſita in *Nova Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, qui tunc erat in ♏ 9 *gr.* 54′. *Nov.* 19. in *Mary-Land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam ♌ in Aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, *ω*, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ 19 ½ cum lat. bor. 34 ¼ *gr.* circiter. *Dec.* 11. ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero*, *α*, *β*,) deſinens in ♑ 26 *gr.* 43′ cum lat. bor. 38 *gr.* 34′. *Dec.* 12. tranſibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4°, cum lat. bor. 42 ½ circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12. hora 5, 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni Uropygium ad *gr.* 10. ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45. deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus *gr.* 3. juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à Stella illa 2 *gr.* 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♐ 22 *gr.* cum lat. bor. 61 *gr.* *Dec.* 21. ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à *β* & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque deſinens in ♐ 24 *gr.* cum lat. 47 ½ *gr.* *Dec.* 29. tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54 *gr.* adeoque deſinebat in ♉ 19 *gr.* cum lat. 35. *gr.* *Jan.* 5. tetigit ſtellam *π* in pectore *Andromedæ*, ad latus ſuum dextrum, & ſtellam *μ* in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat

40 *gr.*; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſima deſinebat è regione ſtellæ $\varkappa$ in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 *gr.* 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$ *gr.* *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde ſerenum erat, luce tenuiſſimâ & ægerrimè ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, adeoque declinabat ab oppoſitione Solis Boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. ſe caudam ad longitudinem *gr.* 12. vidiſſe ſcribit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi haud difficulter conſtabit quod corpora Cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum Planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in tranſitu ſuo per viciniam Solis ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor Solis ut radiorum denſitas, hoc eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à Sole. Ideoque cum diſtantia Cometæ à Sole *Dec.* 8. ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quàm calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem; ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi rectè conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio verſantem ex radiis

So-

Solaribus concipere poſſet; quaſi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aere conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris ob cauſas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porrò notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quàm antea Menſe *Novembri*; ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu Nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio, eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum

fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtinctè ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupilli ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus,& luce obſcuriſſima,

quæ

quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra : ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9. & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28 hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, verſabatur in ♐ 8 *gr.* 41 cum latitudine boreali 28 *gr.* 6′, Sole exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′. Et Cometa Anni 1577 *Dec.* 29. verſabatur in ♐ 8 *gr.* 41′ cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte : in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis Aquilonem verſus ; in poſteriore verò (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directè averſis ; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit ; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt : nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ

extre-

extremitatem alteram, atque adeò quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulò ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aeris noſtri. Nam aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 vicibus majus quam aqua ejuſdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ

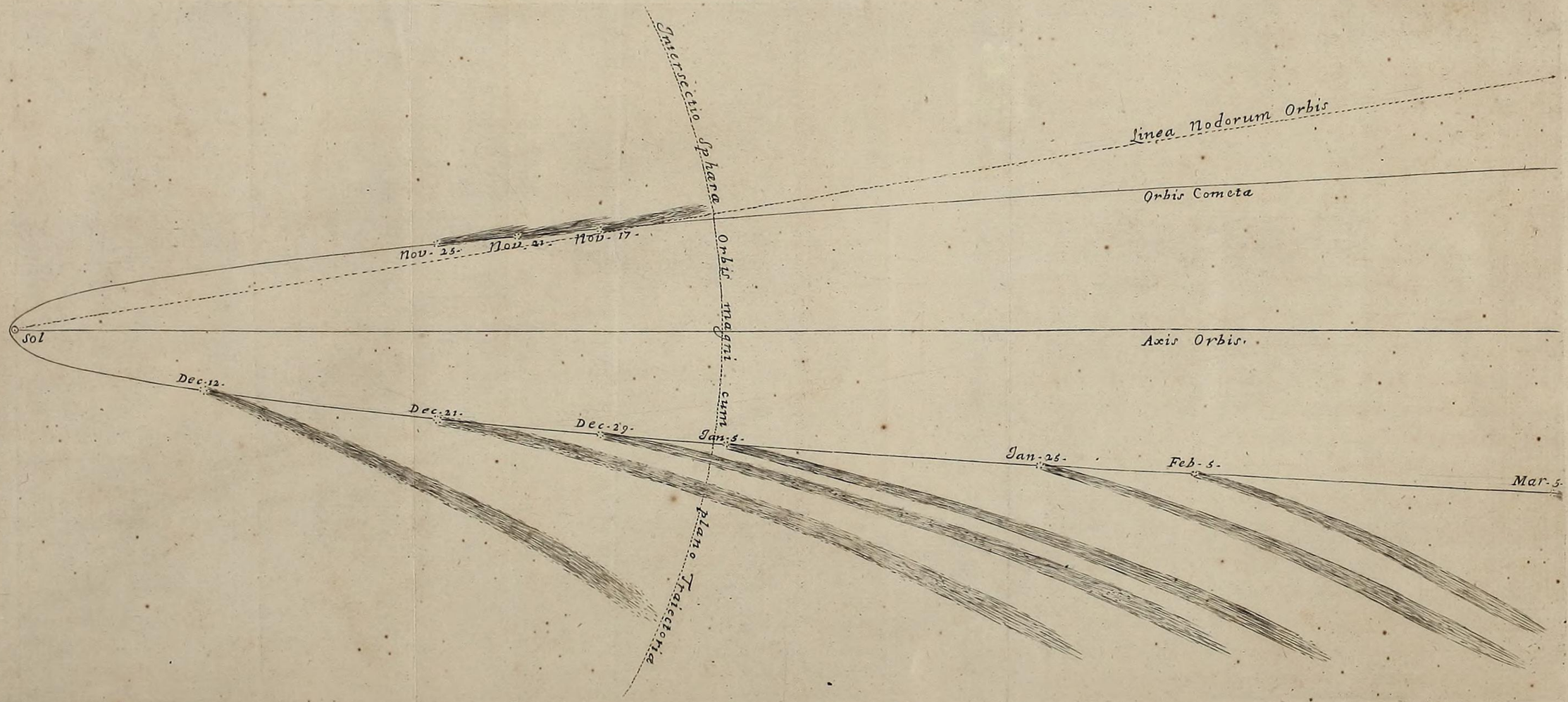
pedes

pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, ſi aſcendatur à ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quàm apud nos in ratione longe majori, quàm ſpatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aeris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quàm ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis, ob longe craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem Solem verſus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam aeris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando

tando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi rectà aſcendat à Sole, aſcendere cæpit à capite quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. aſcendere cæperat à capite ante *Decemb.* 11. adeoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10. apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia Solis celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longidinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni conſtabat qui à tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quàm ob nimiam ſuam tam à Sole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ,à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cæleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt ac diutiſſimè conſervant.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum & progreſſum in partes à Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à ratione prorſus alienum


Intersectio Sphæræ Orbis magni cum Plano Tractionis
Linea Nodorum Orbis
Orbis Cometæ
Axis Orbis.
Sol
Nov. 25.
Nov. 21.
Nov. 17.
Dec. 12.
Dec. 21.
Dec. 29.
Jan. 5.
Jan. 25.
Feb. 5.
Mar. 5.

alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, à radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſq; Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegitabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuò decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porrò ſuſpicor ſpiritum illum, qui aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem reſpicit)

ſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modò Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphæra-rum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ diſtantiis, obſcurius apparuit poſt perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decem.* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novem.* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumq; viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi Novem.* 19. Cometa hicce luce ſua quamtumvis plumbea & obtuſa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quàm poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidêre, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, deſcribantur ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora ſeptima Veſp. *R. P. Valentinus Eſtancius, Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa;

tenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Feb.* circa veſperam ad occaſum Solis brumalem. Inde verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente verò die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minimâ fieri poteſt diſtantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe & in orbibus minoribus revolvi rationi conſentaneum videtur. Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometa-

metarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens Lumen accendere potest.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphicè inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem graphicè inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maximè distantia; sitque *A* tempus inter primam & secundam, ac *B* tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto $\mathcal{D}$ & E; nempe $\mathcal{D}$ area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota $\mathcal{D} + E$, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra): deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d + e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis

ſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ quo area tota $\delta + \varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & − probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege ut ſit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Ecliptícæ, & K longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + n\mathcal{Q}$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Ecliptícæ, & $K + m\mathcal{P}$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates $\mathcal{R}$, r & ρ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpectivè: erit $\mathcal{R} + mr - m\mathcal{R} + n\rho - n\mathcal{R}$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quàm Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

FINIS.

Errata Senſum turbantia ſic Emenda.

Pag. 14 lin. 30 lege. *ut* O K *ad* O D *ſeu* O L. p. 181. 1 *recta.* p. 61 l. 22 & p. 62 l. 2 pro A C lege A B. p. 81 l. 1. *crurum* B L, C L *vel* B M, C M *interſectio, quæ jam ſit* m, *incidat ſemper in rectam illam infinitam* M N, *& crurum* B A, C A *&c.* p. 84 l. 17 poſt verba *Nam ſi* lege A *&* P *ſint Puncta contactuum ubivis in tangentibus ſita, &.* p. 91 l. ult. M L, I K. p. 95 l. 3 poſt *majori* adde, *& perpendicularia minori.* p. 96 l. 30 *&* 31 lege A B C d e f, *&* l. 32 a b c D E F. p. 104 l. 16 pro G O *q.* + H G — P O *q.)* lege H P *q.* = G O *q.* + P O — H G *q.)* p. 105 l. 7 pro G *ſcribe* H. p. 118 l. 17 pro C P lege F f B & l. 19 pro C P lege B P. p. 122 l. 28, pro L *ſcribe* M. p. 123 l. 13, pro D F lege D F *vel* E G. p. 125 l. 16 pro *omnibus altitudinibus*, lege *omnibus æqualibus altitudinibus.* p. 152 l. 7 *per cujus.* p. 153 l. 16 *&* L G. p. 178 l. penult. *ſit quaſi duplo major quam.* p. 209 l. 18 pro S L x S I $^{\frac{1}{2}}$, lege S L x S I $^{\frac{3}{2}}$. p. 226 l. 11 pro 2 B $^{-2}$ *ſeu* $\frac{2}{B\ cub.}$ lege 2 B ^{3} & dele *reciproce.*

Pag. 242 lin. 2, & p. 262 l. 13, & p. 336 l. 5, pro Q. E. D. lege Q. E. I. p. 243 l. 10 2 C D *q.* x Q B. p. 246 l. 14 *proportionalia.* p. 249 l. 12 *reſiſtentia & tempus.* p. 250 l. 1 *-rum inverſe, amittent.* q. 257 l. 4 *præteriti, ſi modo Sectorem tangentes* A p *&* A P *ſint ut velocitates.* p. 274 l. 17 *data quadam.* p. 283 l. ult. T Q x P S. p. 296 in Schemate pro O ſcribe T. p. 307 l. 9 *arcus auferantur.* p. 312 l. 26 *corpus in* D. p. 313 l. 3 *Deſcribat.* p. 314 l. 21 & 28, pro *a* B K k S lege *a* B K k T. p. 325 l. 26 B E *ad* B C. ib. l. ult. *æqualis* $\frac{B\ E\ quad.}{C\ B}$ p. 328 l. 27 *&* *longitudo* C Z.

Pag. 411 l. 22 *pluſquam duplicata, per Prop. LXXXV Lib. I.* p. 413 l. 28 $23\frac{1}{60}$ p. 416 l. 17 $32\frac{1}{60}$ p. 439 l. 9 *æquales pertinentium* p. 442 l. 11 $69\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ *ad* $68\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. ib. l. 18 $68\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ *ad* $69\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. p. 449 l. 5 *area* p D d m p. 450 l. 9 *ad aream* D P M d. p. 455 l. 30 *motum poſteriorem.* p. 459 l. 2 2 M P x A T *qu.* p. 482 l. 3 *dein* b — 2b = c *&c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic eſt* f. ib. in Schemate infra *d* 2*d* 3*d* ſcribe $^{e}\ f\ ^{2e}$ p. 494 l. 4 pro m 27 lege 1 27.